

Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica

Bruno D'Amore^{1,2} e Martha Isabel Fandiño Pinilla²

¹*Doctorado Interinstitucional en Educación DIE, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

²*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Abstract. *In this paper we plan to examine terms and ideas (especially from the fields of pedagogy and psychology) that were very popular during the first years of mathematics education, but which today seem destined for oblivion. The aim is to remind the young scholars of mathematics education the pioneering effort of the first creators of this theory, suggesting to some of them to consider, as a possible field of research, that of the historical-critical-epistemological bases of the theory itself.*

Keywords: images, models, concepts, representations, schemes, scripts, situations, figural concepts, fields, skills.

Sunto. *In questo scritto ci proponiamo di prendere in esame termini e idee (soprattutto tratti dai campi della pedagogia e della psicologia) che sono stati molto in voga durante i primi anni di sviluppo della didattica della matematica, ma che oggi sembrano destinati all'oblio. Lo scopo è quello di ricordare ai giovani studiosi di didattica della matematica lo sforzo pionieristico dei primi creatori di questa teoria, suggerendo a qualcuno di essi di prendere in esame, come possibile campo di ricerca, quello delle basi storico-critico-epistemologiche della teoria stessa.*

Parole chiave: immagini, modelli, concetti, rappresentazioni, schemi, script, situazioni, concetti figurali, campi, competenze.

Resumen. *En este artículo, pretendemos examinar términos e ideas (especialmente de los campos de la pedagogía y la psicología) que fueron muy populares durante los primeros años de la educación matemática, pero que hoy parecen destinados al olvido. El objetivo es recordar a los jóvenes estudiosos de la educación matemática el esfuerzo pionero de los primeros creadores de esta teoría, sugiriendo a algunos de ellos que consideren, como posible campo de investigación, el de las bases histórico-críticas-epistemológicas de la teoría misma.*

Palabras clave: imágenes, modelos, conceptos, representaciones, esquemas, guiones, situaciones, conceptos figurales, campos, competencias.

1. Premessa

Durante la prima fase di sviluppo di una qualsiasi teoria, molti ricercatori, pionieri della prima ora, propongono tesi e termini che possono poi avere maggiore o minore fortuna, maggiore o minor durata, nell'iter dell'evoluzione della teoria stessa. Come dice quasi ironicamente Thomas Romberg, in quella fase ci sono tanti ricercatori quante nuove idee che entrano talvolta in contrasto fra loro (Romberg, 1983, 1988; D'Amore, 2007). Non solo, ma molte sono le richieste continue e le occasioni di discussione sul significato e le interpretazioni possibili della teoria oggetto di costruzione.

L'evoluzione di una teoria, però, a volte fa torto a questi fondatori-iniziatori e, quando poi si sviluppa, consolidandosi, tende talvolta a dimenticare questi contributi pionieristici e a spazzar via nomi di autori, tesi e termini, talvolta inglobandoli in altri più ampi e comprensivi, altre volte semplicemente ignorandoli.

Noi riteniamo che ciò sia dannoso, che nello sviluppo avanzato di una teoria consolidata ci debba essere un sottoinsieme non vuoto di studiosi il cui compito è quello, critico-storico, di ricordarne le origini. Il risultato potrebbe altrimenti essere deleterio, come fu quello del tentativo di inaugurare una “geometria senza figure” (durante il periodo in cui dominò l'idea di *Nuova Matematica* o *Matematica Moderna*, negli anni '60 e '70, che si ispirava, maldestramente, alla lezione strutturale dei Bourbakisti e che pose alla base di qualsiasi azione didattica la teoria ingenua degli insiemi); o del conseguente famoso grido “À bas Euclide” lanciato dal grande matematico francese Jean Dieudonné, uno degli ispiratori del movimento citato in precedenza, nel 1959, durante un importante convegno internazionale a Royaumont.

Tanto per fare un esempio ovvio, la geometria analitica ha senza alcun dubbio trionfato sulla geometria sintetica, nonostante i tentativi (un po' ridicoli) di avversione, per esempio quello famoso di Nicola Fergola tra la fine del XVIII e la prima metà del XIX secolo, presso l'università di Napoli; ma questo trionfo nulla toglie al valore formativo, storico, epistemologico, estetico e scientifico della geometria nata con Talete e sviluppatasi fino agli *Elementi* di Euclide, il cui culmine ci piace porre nell'opera di David Hilbert del 1899 (le famose *Grundlagen der Geometrie*) (Hilbert, 1899).

Abbiamo così deciso di ricordare alcuni termini oramai messi nell'ombra, o quasi, dalla moderna evoluzione della didattica della matematica (DdM), nella speranza che ricordarli possa servire a quegli studiosi che non vogliono perdere contatto con le origini della nostra disciplina. Abbiamo volutamente scelto termini tratti soprattutto dal mondo della pedagogia e della psicologia, sicuri come siamo della tesi che più volte abbiamo difeso, e cioè che la moderna DdM abbia incluso nella sua organizzazione attuale tutto quel che di pedagogia e psicologia poteva essere utile, come parte significativa dello sviluppo scientifico della nostra disciplina. Negli anni '80 alcuni di noi ricercatori, in genere matematici, ci siamo sforzati di studiare queste discipline

appunto per catturarne e fare nostri i concetti, le idee, le creazioni culturali e scientifiche che apparivano necessarie alla DdM; a quei tempi si suggeriva, anche in contesto internazionale, a chi voleva occuparsi di DdM come ricercatore o come professionista (per esempio docente di scuola) di seguire corsi di queste due interessanti discipline (Fandiño Pinilla, 2003); ma, successivamente, questo non si è più ritenuto necessario, dopo che il percorso di inserimento delle idee significative e specifiche era stato compiuto. Non è un caso, a nostro avviso, che ben tre dei più importanti studiosi della prima ora di DdM, il rumeno Efraim Fischbein (fondatore del PME) e i francesi Gérard Vergnaud e Raymond Duval siano psicologi. Il loro contributo all'evoluzione della DdM è tutt'oggi da considerarsi eccezionale, soprattutto se si pensa che quasi tutti gli altri nomi che solitamente si citano come studiosi di base della DdM sono di matematici. Si veda il bel ricordo che David Tall ha dedicato a Fischbein (Tall, 1999).

Il testo che segue è una revisione notevolmente ampliata e aggiornata di vari articoli e testi, soprattutto D'Amore (1999, 2000, 2011).

2. Modelli

2.1. Modelli mentali

Si era soliti tracciare due tipi di profili, per i modelli mentali, che però sostanzialmente si equivalgono da un punto di vista cognitivo: modelli *statici* e modelli *dinamici*. In sintesi, il modello mentale è pensato come *rappresentazione analogica cosciente della conoscenza*.

Per cominciare, occorre porre in evidenza la corrispondenza tra:

- ciò che si vuol rappresentare e le relazioni tra i costituenti di ciò che si vuol rappresentare;
- modello mentale rappresentante e relazioni tra elementi costituenti di tale modello mentale rappresentante.

In questa sottile distinzione si evidenzia la *consapevolezza* di chi si costruisce il modello; già nel momento della costruzione si fa in modo che esso sia coerente sia con il fatto reale che si vuol rappresentare, sia con l'uso che poi si farà di tale modello (Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird & Byrne, 1991; Bara, 1990). Dunque, non c'è un modello mentale semplicemente corretto o no del tal fatto (o idea, o concetto, o situazione, ...), ma bisogna prendere in esame anche che cosa si intende fare poi con quel modello, cioè qual è lo scopo per il quale lo si costruisce.

Stando così le cose, c'è un'altra importante componente: l'idea di un modello non solo costruito in modo consapevole, ma che tenga conto sia del soggetto sia dell'uso; tale modello, dunque, connota sia l'intensione sia l'estensione dell'oggetto rappresentato; con le parole di Bara (1990):

Il nucleo del modello mentale rappresenta l'intensione di un concetto, vale a dire

le proprietà caratteristiche dello stato di cose descritto; le procedure di gestione del modello sono utilizzabili per definire l'estensione del concetto stesso, cioè l'insieme di tutti i possibili stati di cose che il concetto descrive. (Bara, 1990, p. 140)

Poiché abbiamo avuto modo di rilevare che i termini *estensione* e *intensione* non sono poi così diffusi, diremo, seguendo le idee di Gottfried W. Leibniz, che l'*estensione* di una proprietà è la raccolta di tutti e soli quegli oggetti (o elementi) che, rispetto a quella dichiarata proprietà, sono tra loro sostituibili l'uno con l'altro (sono cioè indistinguibili rispetto a quella proprietà).

Per esempio, consideriamo l'insieme dei trapezi, intesi come quei quadrilateri che hanno almeno una coppia di lati paralleli, e assegniamo la proprietà: “avere entrambe le coppie di lati paralleli”; ecco che si ottengono per restrizione i parallelogrammi; non c'è un parallelogramma più ... *parallelogramma* di un altro: un quadrilatero o è un parallelogramma o non lo è. Se imponiamo ora che valga un'ulteriore proprietà, cioè se si aumentano le caratteristiche dell'oggetto che vogliamo porre in esame, allora cresce l'intensione; ma, parimenti, diminuisce l'estensione, cioè l'insieme, da vasto che era, con l'aggiunta di un'ulteriore richiesta diventa meno comprensivo, meno “esteso”. Proseguendo nell'esempio, chiediamo ora di evidenziare quei parallelogrammi che soddisfano una proprietà in più, per esempio: “avere le diagonali congruenti”; ecco allora che questo aumento di intensione, cioè la richiesta di una proprietà caratteristica in più, ci costringe a *scegliere* tra i parallelogrammi solo quelli che hanno quella proprietà, i rettangoli. Quindi, l'estensione diminuisce. Come si usa dire da ben oltre cent'anni: l'insieme dei rettangoli è strettamente incluso nell'insieme dei parallelogrammi.

Di estremo interesse sono le caratteristiche richieste a un modello mentale da Johnson-Laird (1972, 1983):

- un modello mentale deve essere *computabile*, nel senso che deve essere possibile una sua simulazione algoritmica;
- un modello mentale deve essere *finito*.

Ma a volte la “scena” che si vuol descrivere non è finita di per sé stessa; per esempio, nella frase: “Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari”, si parla di una quantità infinita di enti in gioco: impossibile allora costruirne un modello finito di tipo estensionale; anche la frase: “Tutti gli uomini sono mortali”, sebbene chiami in causa un numero finito di enti, gli esseri umani passati, presenti e futuri, non può avere un modello realmente estensionale perché il numero di uomini chiamati in causa è troppo vasto; in tali casi, allora, si ricorre a un qualche cosa che Johnson-Laird chiama *elementi di base*: enti rappresentativi degli elementi in gioco, scelti in modo significativo. Tali elementi di base sono di tre tipi:

- *Primitive*: sono innate e costituiscono la base delle capacità percettive, motorie, emozionali, cognitive di ogni essere umano; sono legate a

percezioni, ad azioni, a capacità cognitive fondamentali: confrontare, memorizzare; a emozioni di base: paura, felicità; queste primitive creano campi semantici detti appunto *primitivi*.

- *Concetti semplici*: sono i concetti costruiti sui campi semantici primitivi: causa, intenzione, idea condivisa pienamente di oggetti o di esseri sotto gli occhi di tutti (esempio: animali), a destra di, diverso da, prima di, ...
- *Concetti complessi*: sono concetti più evoluti, ottenuti per accostamenti di concetti semplici; coinvolgono emozioni di livello più elevato, idee più sofisticate, oggetti complessi.

Si usa spesso il sostantivo *isomorfismo*: il modello mentale rappresenta davvero, cioè è “isomorfo” alla situazione che rappresenta. (In questo senso, il modello alla Johnson-Laird assomiglia molto all’idea matematica di *modello*).

Vi sono poi modelli *figurali* e *proposizionali*. Per esempio, descrivere nella lingua comune una situazione reale, è una rappresentazione proposizionale, un modello a parole. Ma anche una sola parola può o no essere un modello. Come controesempio, la scelta della parola “quadrato” per indicare un quadrato non è fatta per crearne, individuarne un modello: la parola “quadrato” non ha nulla a che fare con la forma cui allude; in compenso, la parola “quadrato” allude a un modello che la competenza e l’esperienza ci danno. Torniamo all’elenco di prima, non ancora esaurito:

- il modello mentale deve essere *economicamente conveniente*, cioè deve richiedere il minimo sforzo cognitivo possibile per rappresentare in modo significativo quel che vogliamo che rappresenti;
- i modelli mentali devono essere *combinabili* l’uno con l’altro, per ottenere nuovi modelli più complessi e maggiormente comprensivi.

Johnson-Laird (1983) propone anche una tassonomia dei modelli, distinguendoli soprattutto in due categorie:

- modelli *fisici*: rappresentano situazioni aventi a che fare con il mondo fisico;
- modelli *concettuali*: rappresentano situazioni astratte.

Dei primi diamo solo l’elenco: relazionale, spaziale, temporale, cinematico, dinamico, di immagine (rinviamo a D’Amore, 1993, 2014, per una più dettagliata analisi). Dei secondi diciamo qualche cosa di più. Un modello concettuale può essere:

- *monadico*: concerne proprietà di individui;
- *relazionale*: riguarda relazioni tra gli individui di uno stesso modello monadico;
- *metalinguistico*: dà elementi o relazioni i cui oggetti sono o elementi o relazioni dei modelli relazionali o monadici;
- *insiemistico*: introduce raggruppamenti o classificazioni all’interno di termini già dati.

Da sempre, ai matematici interessati a questo genere di questioni è più consono lo studio dei modelli concettuali, che sembrano essere i più promettenti nel campo della didattica della matematica (Noirfalise & Perrin-Glorian, 1996; Dupin, 1995). Questa specifica teoria dei modelli nel campo della scienza cognitiva ha dato alcuni risultati interessanti che riassumiamo come segue.

1. Sebbene dati e procedure siano entità diverse, non sembra esserci una distinzione così profonda tra conoscenza dichiarativa e conoscenza procedurale.
2. Poiché la descrizione di un oggetto (vedi il caso della cosiddetta matematica elementare, cioè quella matematica che si occupa della fondazione degli elementi costituenti la matematica) non può non tenere conto della sua funzionalità, sappiamo oggi che la costruzione di un modello mentale relativizza la fase di costruzione di una conoscenza anche specifica.

Insomma: non sappiamo che cosa sia davvero un concetto matematico appena esso è stato definito solo verbalmente, cioè oralmente o per iscritto, finché non lo vediamo “in azione”, non lo vediamo usato. Solo allora tendiamo a farcene un modello. E ciò vale in generale.

La teoria dei modelli di Johnson-Laird è stata in grande auge, anche critica, specialmente nel mondo della ricerca in psicologia, fino a fine secolo XX; è auspicabile che essa non venga del tutto dimenticata dal mondo della DdM e dagli studiosi di teoria dell'apprendimento, più in generale. I contenuti di questi studi e quelli di Bara (1990) ci sembrano ancora meritevoli di profonda attenzione da parte di quegli studiosi che intendono occuparsi dei fondamenti della DdM.

2.2. Immagini, rappresentazioni mentali e modelli: altre interpretazioni

Molti autori degli anni '90 non fanno troppa differenza tra:

- modello di una situazione;
- rappresentazione mentale di una situazione;
- immagine di una situazione.

Per questi autori, il termine *immagine*, riferito a situazioni, ma anche a concetti, significa quel che per molti altri è *modello* o rappresentazione mentale. Per lo più, essi fanno riferimento a lavori iniziati a partire dal 1971 nei quali Piaget e Inhelder (1966) proposero una distinzione tra:

- immagini *riproduttive*, tese a evocare oggetti in situazioni ed eventi noti;
- immagini *anticipatorie*, che rappresentano oggetti costruiti solo mentalmente.

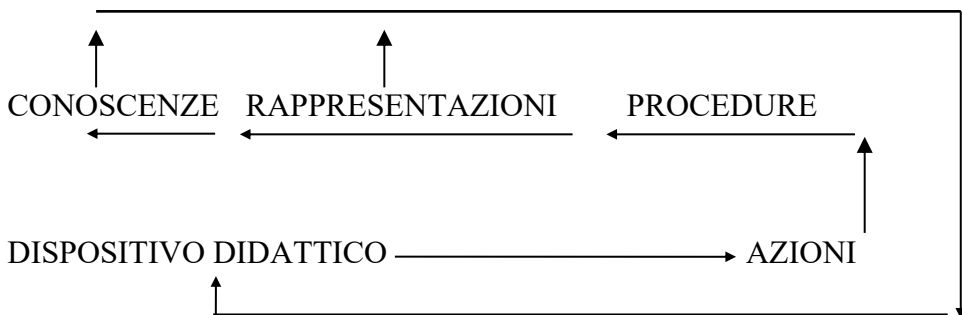
Secondo molti di questi autori, tali immagini sono visive, figurali e costituiscono il punto di partenza nell'attività di concretizzazione dei pensieri

evocati dai simboli verbali e dai simboli matematici, trattati come se fossero oggetti concreti. Si intende come queste *immagini* siano qualche cosa in più di ciò che comunemente si indica con questo nome in forma ingenua, ma meno di quel che è un modello per i cognitivisti; o tutt'e due le cose, confuse insieme. Per sostenere questo punto di vista, Jean Piaget e Bärbel Inhelder ricercarono testimonianze e conferme da parte di matematici e ne trovarono, a loro avviso, soprattutto in Henri Poincaré e Jacques Hadamard.

Lungo il corso dell'ultimo decennio del XX secolo, gli studi sulle rappresentazioni si sono intensificati, proprio per quanto concerne la DdM, spesso a partire da Shepard (1980). Per esempio, in un lungo lavoro dedicato all'analisi didattica di protocolli di allievi, Brun e Conne (1990) propongono:

Per rappresentazione noi intendiamo i contenuti organizzati del pensiero a proposito delle situazioni trattate. Conoscenze dell'allievo e situazione sono due aspetti di una stessa funzione che, mettendole in rapporto, rinforza il carattere interazionista della formazione delle conoscenze (Saada-Robert, 1989). Prendendo le rappresentazioni come oggetto di studio, lavoriamo su questo stesso rapporto, cioè l'unità funzionale che permette di comprendere l'acquisizione delle conoscenze in situazione, al posto di separare i due termini (conoscenza, situazione) e poi cercare di farli interagire. La rappresentazione è questa funzione che si fa carico delle interazioni tra conoscenza e situazione. (Brun & Conne, 1990, p. 266)

Le rappresentazioni dunque giocano un ruolo di decisiva importanza nel processo di conoscenza, e interagiscono con esso, tanto che, in uno schema nel quale Brun e Conne (1990, p. 267) vogliono far cogliere i rapporti tra conoscenze dell'allievo e situazione in una prospettiva di apprendimento, le rappresentazioni hanno un ruolo che sembra essere determinante:



Uno studio estremamente approfondito dell'idea di *rappresentazione* è diffuso in tutta l'opera di Raymond Duval, fin dai primi anni '90. Anzi, è a partire da questi primi studi che noi abbiamo cominciato ad approfondire il tema in una reale prospettiva di DdM. Ma non diamo in questo caso la bibliografia secondo criteri storici, dato che in alcuni lavori recenti lo stesso autore ha

talmente perfezionato la questione che ci pare valga la pena affrontarla direttamente in essi (Duval, 2015, 2016, 2017). Una nostra analisi dell'articolo citato come Duval (2016) mette in evidenza lo sviluppo degli studi specifici di Duval su questi temi (D'Amore, 2016).

Altre recenti ricerche di estremo interesse hanno mostrato quanto sia duttile e profonda la scia sulla quale Duval ha lasciato un solco indelebile di un'estrema profondità. Suggeriamo la lettura di Iori (2017, 2018). Nel primo testo si affronta il problema, fondamentale per la DdM, della distinzione fra un oggetto di conoscenza specifica di tipo matematico e le sue rappresentazioni, facendo riferimento soprattutto alla teoria dei registri di rappresentazione semiotica, principalmente all'approccio semio-cognitivo di Duval. La seconda ricerca si focalizza sugli insegnanti e sulla loro consapevolezza dell'uso di aspetti semiotici nel corso del processo di insegnamento-apprendimento della matematica, evidenziando quale sia il livello di consapevolezza di tale uso; per far ciò, oltre all'approccio semio-cognitivo di Duval, l'autrice ricorre all'approccio semiotico-interpretativo pragmatico di Peirce. I risultati sono di estremo interesse, anche concreto.

Nel mondo della psicologia, che venne assunto come base dagli studiosi di didattica, oggetto e rappresentazione venivano distinti negli anni '70 e '80, proseguendo nel solco tracciato da René Descartes, Gottfried W. Leibniz, Immanuel Kant, Georg W. F. Hegel ed Edmund Husserl, a seconda della intenzionalità della produzione (Paivio, 1971, 1986):

- produzione *intenzionale*;
- produzione *automatica*.

Nel primo caso si possono avere rappresentazioni semiotiche che a loro volta si distinguono in *non analogiche* (linguaggi, codici) e *analogiche*. Le *non analogiche* possono essere:

- *a contesto interno* (enunciati, discorsi: essi articolano diversi livelli di organizzazione a seconda delle differenti funzioni discorsive);
- *senza contesto interno* (come liste, formule, sequenze, tabelle).

Le *analogiche* possono essere:

- *a significato interpretativo da determinare* (come schemi, grafici cartesiani, carte o mappe, figure geometriche);
- *a significato visuale autonomo* (immagini: come schizzi, ritratti, caricature).

Nelle rappresentazioni a produzione automatica abbiamo soprattutto immagini che sono riproduzioni *immediate* (cioè non motivate) o *motivate* dal tentativo di imitare un modello:

- Nel primo caso possono essere *esterne* (riflessi, foto, tracce, impronte, insomma: fenomeni fisici o meccanismi tecnici), o *interne* (sogni, ricordi).
- Nel secondo caso abbiamo vari tipi di immagini che sfruttano appunto il

desiderio e la capacità di imitare modelli voluti; possono essere oggetti, immagini numeriche o altro.

Duval insiste molto sulla necessità di non confondere il contenuto di una rappresentazione con l'oggetto che essa rappresenta, come a volte capita nelle rappresentazioni di oggetti matematici. Il che non è senza sovrapposizione a quel che di analogo accade nel guardare opere d'arte, come lo stesso Duval mostra (Duval, 2018).

2.3. Modelli nel senso di schemi

Quando si dice *modello*, però, altri autori intendono una cosa ancora diversa: intendono *schema* di qualche cosa. Ora, sugli schemi si potrebbe divagare moltissimo. Basti pensare agli *schemi* nel senso di Vergnaud (1990): una totalità dinamica organizzata.

Si pensi che in francese esistono due parole diverse per dire “schema”: *schéma* e *schème*. Il primo si riferisce agli aspetti grafici, simbolici, un “riassunto grafico” che sta per un oggetto o una situazione reale; il secondo è un termine più filosofico o psicologico (schema concettuale, per esempio). Più in generale, si può intendere per schema

un qualsiasi tipo di elemento organizzato, di struttura di informazioni, che è il prodotto dell'attività costruttiva della mente e che insieme dà alle successive attività di ricordo, di comprensione, di apprendimento uno specifico orientamento: nel senso più generale, un qualsiasi processo di costruzione, di interpretazione, di acquisizione delle conoscenze è determinato, nella sua modalità e nei suoi risultati, dagli schemi già esistenti. (Pontecorvo, 1983, pp. 330–331)

Si vede chiaramente come questa accezione di schema sia generale; essa raccoglie sia l'idea di schema come struttura di conoscenze che interagiscono fra loro, sia l'idea di schema come “strutture di dati che rappresentano concetti generici conservati nella memoria” (Rumelhart & Ortony, 1977, p. 106). Gli schemi, in questa visione generale, devono avere le seguenti quattro caratteristiche:

- Gli schemi contengono *variabili*; in uno schema, cioè, ci sono entità (per esempio soggetti) che, pur avendo lo stesso ruolo, cambiano di ruolo o di senso a seconda della situazione specifica; oppure vi sono gli stessi soggetti, ma con funzioni diverse.
- Negli schemi possono esistere *sub-schemi*, cioè possono essere estrapolate parti che a loro volta costituiscono schemi; nello schema sulla risoluzione dei problemi proposto da D'Amore (1993, 2014), che apparirà tra breve, ci sono vari esempi di sub-schemi, com'è facile verificare; per questa sua complessità, è il motivo per cui lo scegliamo a mo' di esempio.
- Gli schemi organizzano e modellizzano la conoscenza a vari livelli di astrazione e non solo a quello lessicale.

- Gli schemi chiamano in causa conoscenza e non costituiscono definizioni, sono cioè rappresentazioni di conoscenza e non solo esplicitazioni.

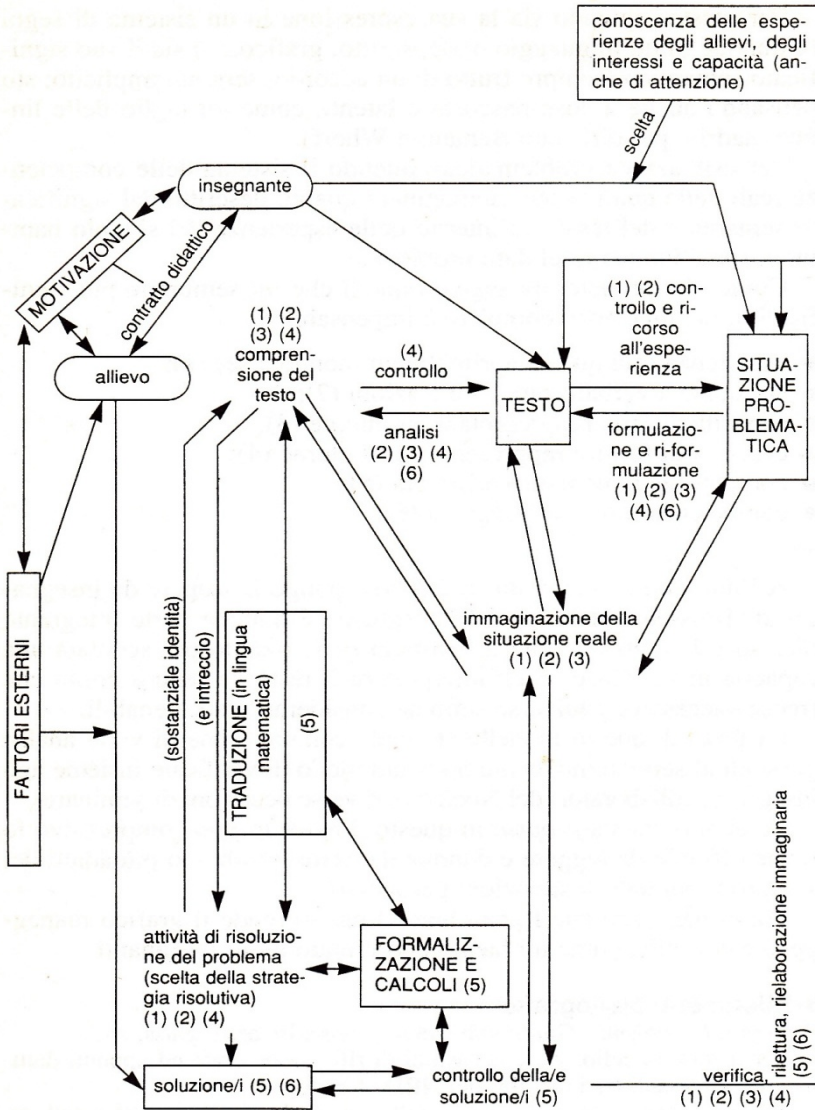


Figura 1. Esempio di schema di risoluzione di problemi.

Proponiamo in Figura 1, solo a mo' di esempio, lo schema ricordato sopra, tratto da D'Amore (2014, p. 223): qui lo schema è illustrativo, complesso, racchiude elementi statici e dinamici "e (...) dunque offre un mezzo utile per

descrivere e porre in evidenza diverse componenti della risoluzione stessa e delle difficoltà che incontrano gli allievi” (D'Amore, 2014, p. 223). Naturalmente, nel testo citato tutti i termini che appaiono nello schema sono oggetto di dettagliata spiegazione.

Può essere interessante il fatto che, in precedenza, Rumelhart (1980), invece di tentare una definizione di *schema*, ne dia una descrizione attraverso quattro analogie:

- Gli schemi sono visti come *copioni* di testi teatrali; ogni esemplificazione dello schema è come una diversa modalità di rappresentazione di una determinata *pièce*.
- Gli schemi sono visti come *teorie* di tipo informale che ciascun essere umano si fa internamente, anche a carattere predittivo.
- Gli schemi sono visti come delle *procedure* di un programma di calcolatore.
- Gli schemi sono visti come *analizzatori linguistici* di enti o situazioni, strumenti per valutarne la correttezza e l'accettabilità.

Abbandoniamo il significato filosofico e psicologico di schema, e fermiamoci sull'idea di schema come rappresentazione (mentale ma soprattutto grafica) di qualche cosa. Se tale *cosa* è un oggetto (a maggior ragione se concreto), si può parlare di piano, di progetto, di grafico o altro (lo schema di un aereo, lo schema di funzionamento di un motore); se la *cosa* è una situazione, allora spesso si parla anche, in questo caso, di modello.

In uno schema-modello, il proponente deve cogliere gli aspetti essenziali di quel che intende dire o illustrare e creare un grafico che sia il più esplicativo possibile.

Ma ci sono in letteratura anche altre accezioni dei termini *modello* e *schema*, talvolta in opposizione tra loro; si trova spesso: *modelli di comportamento - schemi di comportamento*. A volte, a causa della differenza con i casi precedenti, questi modelli-schemi costituiscono una categoria a sé stante.

Tra tutti gli esempi possibili, scegliamo uno dei nostri esempi preferiti, tratto da lavori di Benjamin Whorf, il famoso antropologo statunitense.

Whorf (1956) teorizza una mancanza di libertà nell'atto del comunicare, dovuto a qualche cosa che chiama “il taglio delle lingue madri”. Questa suggestiva immagine è di straordinaria importanza, a nostro avviso, in tutti quegli studi connessi con le difficoltà che hanno gli studenti a esprimere in lingua naturale, materna, le proprie competenze matematiche: non solo ci sono obiettivi problemi di “traduzione”, non solo ci sono condizionamenti generali, immagini da rispettare, *frame* e *script* (termini sui quali torneremo a lungo fra breve); ci si mette di mezzo a mo' di ulteriore ostacolo anche una costruzione dettata da profondi motivi antropologici ... Scrive Whorf (1940, p. 230) [il testo è riportato per intero in Hall (1959, p. 120)]:

Noi tutti conserviamo un'illusione sull'atto del parlare, un'illusione che il parlare sia privo di costrizioni, spontaneo, e semplicemente “esprima” qualunque cosa desideriamo fargli esprimere. Questa apparenza illusoria deriva dal fatto che i fenomeni obbligatori all'interno del flusso apparentemente libero del discorso sono così completamente dispotici, che il parlante e l'ascoltatore sono legati inconsciamente come nella presa d'una legge di natura.

Ancora (Whorf, 1940, pp. 230–231):

Noi selezioniamo la natura secondo linee tracciate dalle nostre lingue madri, le categorie e i tipi che isoliamo dal mondo dei fenomeni non li troviamo là perché sono lì, davanti agli occhi di ogni osservatore; al contrario, il mondo è presentato in un caleidoscopico flusso d'impressioni che deve essere organizzato dalla nostra mente. Noi facciamo a pezzi la natura, la organizziamo in concetti, e ciò soprattutto perché partecipiamo a un accordo di organizzarla in questo modo; un accordo che vale in tutta la nostra comunità linguistica ed è codificato negli schemi della nostra lingua. L'accordo è completamente implicito e non dichiarato, ma i suoi termini sono assolutamente obbligatori; non possiamo in alcun modo parlare se non sottoscrivendo l'organizzazione e la classificazione dei dati che l'accordo impone. Questo fatto è molto significativo per le scienze moderne, poiché vuol dire che nessun individuo è libero di descrivere la natura con assoluta imparzialità, ma è obbligato a certi modi di interpretazione anche quanto si ritiene più libero.

(Per un approfondimento sugli ultimi punti qui trattati, si può vedere D'Amore, 2017, 2018).

Fare modelli-schemi, per esempio, significa *sezionare* la natura, gli avvenimenti, le situazioni. Se non c'è libertà, ma i *tagli delle lingue madri* ci costringono a vedere le cose in un certo modo, l'apparente funzionalità di tali schemi non è legata all'oggettività che tutti auspichiamo e che ravvisiamo, in minore o maggior misura in essi, ma a retaggi antropologici o linguistici che ci *costringono* a riconoscere una sorta di oggettività laddove si tratta invece di impliciti accordi ancestrali.

Molte delle nostre convinzioni vacillano. E scopriamo così, con umiltà, che c'è ancora tanto da fare non solo per capire la realtà, ma anche solo per descriverla.

Riteniamo molto interessante la recentissima posizione di Vergnaud, uno dei primi e più profondi studiosi dell'idea di schema specifica per la DdM:

Cominciamo dal concetto di *schema*; noi lo definiamo in base a quattro componenti:

- uno o più scopi;
- regole di azione, di assunzione di informazione e di controllo;
- invarianti operatori; concetti-in-atto e teoremi-in-atto;
- possibilità d'inferenza.

(Vergnaud, 2017, p. 11)

È essenziale secondo noi non accontentarsi dell'idea di azione, per quanto essa

sia importante: l'attività è in effetti piena di assunzioni d'informazione, necessarie sia per determinare le successive azioni sia per controllare la legittimità e il corretto sviluppo delle azioni già effettuate.

Gli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto) caratterizzano il contenuto concettuale delle regole effettivamente seguite e la loro adeguatezza se esse sono pertinenti; se non lo sono, gli invarianti operatori permettono di caratterizzare gli errori commessi in termini concettuali. Senza gli invarianti operatori, non sarebbe possibile comprendere la relazione fra le due componenti della conoscenza: la sua forma operatoria, che permette di agire in situazione, e la sua forma predicativa, che permette di enunciare gli oggetti di pensiero e le loro proprietà.

Le possibilità di inferenza sono a loro volta necessarie per comprendere da una parte le previsioni e attese dell'attività e, dall'altra parte, le ragioni alla base di nuove informazioni, decisioni d'azione, assunzioni di nuove informazioni, nuove azioni. L'attività è anche calcolo.

La somiglianza fra la definizione di *schema* e quella di *algoritmo* è evidente. Semplicemente, gli algoritmi sono degli schemi, ma non tutti gli schemi sono degli algoritmi. Si vede la loro complementarità in due casi molto importanti:

- Quando un allievo dimentica una parte di un algoritmo, per esempio della divisione, o una parte del ragionamento proporzionale, e la sostituisce con degli schemi personali.
- Quando un allievo affronta una situazione nuova per lui e non dispone di un algoritmo che lo possa aiutare; egli fa allora appello a tutte le sue risorse, cioè a quelle dei suoi schemi apparentemente promettenti.

2.4. Ancora su immagini e modelli

La discrepanza fra vari autori a proposito dei termini *immagine* e *modello* è denunciata anche dagli psicologi. Citiamo, per confermare la frase precedente, le parole di Vecchio (1992):

Il termine "immagine mentale" è (...) ambiguo e, a seconda dell'interpretazione che ne viene data, ne risultano tradizioni di ricerca assai diverse, sia per i riferimenti teorici assunti che per le metodologie impiegate. (...) Ora, in inglese, il termine usato per designare le immagini mentali è "*imagery*", di cui non esiste un esatto corrispondente in italiano. La traduzione più vicina è "immagine" o anche "immaginazione", quest'ultima impiegata per indicare i processi di formazione e manipolazione delle immagini mentali stesse. Tuttavia in italiano questi termini oltre a riferirsi ad una particolare forma di rappresentazione mentale, quella figurativa-analogica, sono usati anche per indicare processi di pensiero di tipo intuitivo, legati alla fantasia, alla creatività, ed ai loro prodotti. Da quest'ultimo punto di vista si possono ritenere sinonimi parole come "fantasia", "fantasticheria". Quest'ambiguità è assente in inglese, dove si usano differenti verbi per i due processi: "*to image*" per indicare la rappresentazione figurativa e

“*to imagine*” per designare la fantasticheria. (Vecchio, 1992, p. 18)

Nella famosa “definizione” di Holt (1964), un classico spesso preso a modello, si parla di *immagine mentale* nei seguenti termini:

una rappresentazione debole e soggettiva di una sensazione o percezione senza un adeguato input sensoriale; [essa] è presente nello stato di veglia ed è conscia, come parte di un atto di pensiero (...) può essere uditiva, visiva, o di qualsiasi altra modalità sensoriale. (Holt, 1964, p. 257)

Le caratteristiche che sembrano predominanti in questa diversa concezione di immagine mentale sono dunque:

- la “debolezza”, cioè una non del tutto marcata definibilità esplicita;
- la soggettività, cioè un forte legame con le caratteristiche e le esperienze individuali;
- la mancanza di un “adeguato” input sensoriale produttivo;
- l’esser parte di un atto di pensiero, dunque una non-esistenza in sé stessa, come ente unico;
- l’essere sensoriale, cioè legata ai sensi.

Forse è con Alan Paivio che inizia una vera e propria storia moderna del concetto di *immagine*; dopo il suo famoso *Imagery and Verbal Processes* (1971), dedicato soprattutto alla memoria e all’apprendimento verbale, Paivio elabora una teoria che va sotto il nome di *Ipotesi del Doppio Codice*, giungendo nel 1986 all’altra famosa opera *Mental Representations* (1986), nella quale presenta delle unità di rappresentazione di base, sia per le informazioni non verbali sia per le verbali, che chiama rispettivamente: *imagens* e *logogens*. In particolare, a noi qui interessano le prime; in esse

si parla di organizzazione simultanea, nel senso che l’informazione codificata risulta simultaneamente disponibile per l’elaborazione e non è dunque vincolata ad una determinata successione temporale per quanto ne riguarda l’accesso e l’elaborazione. (...) L’elaborazione nel sistema non-verbale è essenzialmente parallela, operando su strutture che mantengono una relazione di analogia con ciò che è rappresentato. (Vecchio, 1992, p. 23)

Dunque l’immagine viene interpretata come una modalità specifica di rappresentazione della conoscenza. Ma ogni conoscenza individuale è a sua volta connessa alle precedenti conoscenze dell’individuo, alla sua esperienza del mondo circostante, alle modalità personali di mediazione della percezione.

Quest’ultimo punto è stato oggetto di critiche: in quanto legato alla percezione, il risultato dell’immagine sarebbe allora qualche cosa di “sfuocato” (l’aggettivo viene unanimemente fatto risalire a Jean Piaget). Per quest’ultimo l’immagine non deve essere intesa come un costituente del pensiero, ma come un suo supporto simbolico, uno strumento per eseguire operazioni (Piaget & Inhelder, 1966).

Accenniamo solo a un importante momento, quello in cui Kosslyn (1980),

allo scopo di eliminare un dibattito allora in corso sulla contrapposizione tra forme di rappresentazione *analogica* e *proposizionale*, suggerisce l'idea di *immagine* come una forma di attivazione e utilizzazione di strutture di dati a disposizione dell'individuo. Forse è a partire da questo suggerimento che si elabora il modo moderno di vedere le immagini come un *processo* e non come un semplice *stato*; in particolare, l'immagine viene vista all'interno di studi sul ragionamento e sul *problem solving*; ci stiamo riferendo ancora ai profondi studi sui modelli mentali di Johnson-Laird (1983). E così torniamo a quanto detto nei paragrafi precedenti.

Le attività immaginative sarebbero dunque legate a delle *intenzioni* (scelte, decisioni, ..., soprattutto connesse con le attività di *problem solving*), il che conduce a considerare differenze individuali. Queste differenze individuali sono inoltre connesse all'efficacia con cui ogni individuo *sa utilizzare processi di base* e ciò porta alle condizioni per un ricorso spontaneo all'immaginazione nei compiti cognitivi, secondo gli studi di Katz (1983, 1987).

Quali sarebbero le abilità di base che contraddistinguono gli individui impegnati in attività cognitive, come gli studenti, relativamente alle immagini mentali?

Secondo Katz (1987) (che riprende precedenti studi e idee di Kosslyn, 1980), esse sono:

- abilità nel generare immagini mentali;
- abilità nel formare immagini mentali integrate;
- abilità nell'accesso alle immagini mentali;
- abilità nel mantenere in memoria le immagini mentali.

Ovviamente la ricerca specialistica in questo settore è stata sempre più rapida ed estesa e qui, lo ripetiamo, ci stiamo limitando a dare solo qualche rapida indicazione di massima, finalizzata esclusivamente agli scopi detti all'inizio del testo, una sorta di conservazione della memoria.

Un'applicazione di alcune di queste teorie alle abilità e alle modalità di conduzione nel risolvere problemi di matematica è già stata da noi parzialmente presentata in D'Amore (1993, 2014) dove c'è anche una bibliografia più specifica.

Quanto sopra e la distinzione fatta da più autori tra immagini mentali e modelli mentali, ci suggerisce (limitatamente a quanto riguarda le considerazioni relative a processi cognitivi nel campo della matematica) di tentare di raccogliere le sollecitazioni precedenti e di proporre la seguente terminologia, mediata da quanto detto finora.

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale o misto prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da esperienza personale, influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico del singolo individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente

(anche questa capacità di elaborazione dipende però dalle caratteristiche dell'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna e, almeno in prima istanza, involontaria, ma con la possibilità di una rielaborazione.

L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative a uno stesso concetto costituisce il *modello mentale* del concetto stesso. Il modello mentale di un concetto, dunque, riunisce in sé ciascuna delle immagini mentali che di quel concetto ci si sono fatte nelle diverse occasioni specifiche, sulla base delle condizioni dette.

Ma su questo punto dobbiamo invitare a un'ulteriore riflessione, perché il modello si può vedere o staticamente, come semplice insieme delle immagini; o meglio dinamicamente, come immagine-limite di un processo che costituisce una successione di immagini. Vediamo come.

Relativamente a un certo concetto, il soggetto sembra farsi immagini via via più generali, comprensive e circostanziate, accogliendo ogni volta dettagli, informazioni, proprietà più estese; dunque abbiamo un vero e proprio *processo dinamico* che consta di una successione di immagini mentali; il *modello mentale* (cognitivo) sarebbe allora il “limite” di questa successione di immagini, al momento in cui esse, pur con le sollecitazioni relative a proprietà sempre più generali, non richiedono più la formazione di immagini *nuove*; dunque il modello mentale sarebbe il risultato finale del processo delle immagini mentali, quando una di queste diventa stabile.

Con questa interpretazione (nel solo campo del cognitivo, come abbiamo più volte detto, e del cognitivo specifico del campo matematico, come pure abbiamo più volte detto), si spiegherebbe la relatività della creazione di immagini mentali via via *accomodate*, sulla base di sollecitazioni dell'insegnante. Hanno qui senso gli studi sul conflitto cognitivo (D'Amore, 1999); sulla formazione di nuove immagini; sulla formazione di modelli (stabili e dunque resistenti a eventuali nuove sollecitazioni).

Dal punto di vista didattico, la cosa potrebbe essere detta come segue e avere allora ancora oggi un certo qual interesse.

L'immagine mentale suscitata dalla presa in carico cognitiva di un concetto matematico dà un'informazione che tiene conto della cultura individuale, dell'esperienza personale e delle competenze generali dell'individuo (ma anche di una sua capacità specifica di farsi immagini: e questa capacità potrebbe essere oggetto di attenzioni da parte dell'insegnante); essendo almeno in prima istanza involontaria, l'immagine mentale si forma per semplice associazione verbale o iconica, o altro. A seguito di successive sollecitazioni, può capitare che si abbia contrasto tra l'immagine formatasi spontaneamente e la sollecitazione stessa; in questi casi si può avere conflitto cognitivo. Sta allora all'individuo mettere in moto le proprie *abilità* in questo campo (nel senso di Katz, 1987) ed elaborare l'immagine fino ad *accomodarla* alla nuova situazione, determinata dalla sollecitazione (per esempio del docente nei riguardi degli studenti). Si giunge così a una nuova immagine che

possiamo chiamare successiva alla precedente perché più comprensiva di questa. Questo processo può ripetersi più e più volte, ottenendo così una successione di immagini mentali che accompagnano le sollecitazioni suscitate attorno a un concetto (D'Amore, 2001a, b).

Ma ci sarà un momento in cui l'ultima immagine mentale relativa a quel concetto non ha più bisogno di essere seguita da (cioè accomodata a) una *nuova* perché non viene più provocato alcun conflitto: le nuove sollecitazioni trovano nell'ultima immagine mentale piena legittimità e totale rispondenza. Il soggetto allora trasforma (ovviamente inconsciamente) l'immagine mentale associata a quel concetto in un modello mentale (stabile) di esso.

Da un punto di vista didattico-cognitivo non è detto che il modello si formi al momento culturalmente o cognitivamente giusto (dal punto di vista del sapere matematico o dell'esplicita volontà didattica dell'insegnante). Non è detto cioè che l'immagine mentale diventi modello mentale (stabile) quando davvero il concetto è acquisito in modo consono alla sua natura matematica cioè quando il concetto è esattamente quello atteso all'interno del sapere matematico istituzionale atteso. Può succedere cioè che anzitempo, rispetto alle necessità di correttezza matematica, si formi un modello (per esempio un modello intuitivo ingenuo come quello famoso della moltiplicazione che accresce: $a \times b > a$ e $a \times b > b$, non importa quale sia il dominio numerico di a e b ; o per esempio un modello parassita, non desiderato) (D'Amore, 1999; ci si ispira ad alcuni classici lavori di Fischbein, 1985a, b). Ciò crea problemi didattici in quanto, se è relativamente facile "rompere" un'immagine mentale (instabile) e accomodarla a una nuova più comprensiva e corretta nei riguardi del sapere, dato che si tratta di un processo in atto e non di qualcosa di stabile, più complesso è distruggere un modello mentale (stabile) per far posto a un altro, dello stesso concetto.

Per semplicità potremmo pensare che lo studente preferisce allora (sempre in modo non cosciente, beninteso) avere due modelli diversi per due concetti a suo avviso diversi, anche se essi dovrebbero essere, dal punto di vista del sapere matematico, conglobati nello stesso modello concettuale. È per esempio questa la situazione evidenziata da Fischbein a proposito della moltiplicazione (Fischbein, 1985b), tanto per proseguire nello stesso esempio, per la quale nella mente di alcuni studenti sembrano aversi due distinti modelli: un modello per la moltiplicazione fra naturali (quella che effettivamente *accresce*, a parte i casi 0 e 1) e un modello per un'altra moltiplicazione (quella assai più complessa da gestire, tra numeri razionali, espressi mediante frazioni o scritte con la virgola).

Tutto ciò sembra costituire una semplificazione notevole del problema, soprattutto per gli aspetti cognitivi e didattici (che sono poi quelli che ci interessano) e ci sembra ragionevole per il nostro scopo. Dal punto di vista della ricerca in DdM, i precedenti passi ci sembra spieghino piuttosto bene e in un modo unico varie questioni che altrimenti appaiono piuttosto complicate e

intricate. A compiere questa riduzione si è rivelato utile lo studio di Kaldrimidou (1987).

Nota 1.

È possibile delineare un confine netto tra immagine mentale e rappresentazione semiotica? La rappresentazione semiotica ha senso in una struttura segnica, mentre l'immagine mentale è

una rappresentazione debole e soggettiva di una sensazione o percezione senza un adeguato input sensoriale; [essa] è presente nello stato di veglia ed è conscia, come parte di un atto di pensiero (...) può essere uditiva, visiva, o di qualsiasi altra modalità sensoriale. (Holt, 1964, p. 257, già citato anche in precedenza)

Molto sembra dipendere dalla complessità; cioè: se l'analisi si limita ai segni elementari, immagine mentale e rappresentazione semiotica sembrano quasi coincidere (si pensi ai segni dei numerali romani: l'iconicità è massima).

L'interesse per questo tema vale in generale, non in modo specifico per la matematica, dato che l'inaccessibilità percettiva degli oggetti matematici costringe a mettere subito in gioco le rappresentazioni semiotiche e le immagini mentali sembrano essere necessariamente soggette a quelle, a una loro elaborazione. Riteniamo che su questo punto ci sia ancora parecchio da lavorare.

2.5. Modelli mentali “interni” degli studenti. Modelli “esterni”

A scopi didattici, sarebbe assai utile conoscere il modello mentale (che si usa chiamare “interno”) che gli studenti hanno dei vari concetti matematici. Se questo fosse possibile, l'insegnante potrebbe attivare strategie didattiche personalizzate adatte e modificare così i modelli che ritiene non perfettamente adeguati al sapere matematico, cercando poi il modo di farli adottare dallo studente. Ma risalire al modello mentale che un individuo si fa di un concetto è impresa ardua se non addirittura impossibile.

Anche se e quando l'individuo vuol commentare a sé stesso il proprio modello mentale, lo fa in una *lingua interna* o *linguaggio interiore*, assolutamente personale e privo di regole lessicali (Vygotskij, 1990).

Se lo studente intende o deve (per esempio nel corso di un'interrogazione orale o nelle risposte a un test scritto o nel rispondere a un'intervista) comunicare all'esterno il proprio modello mentale relativamente a un concetto, allora è costretto a “tradurlo” in qualche cosa di “esterno” [quale che sia il linguaggio nel quale comunicherà il risultato: verbale (orale o scritto), non verbale (grafico, iconico, figurale, mimico, gestuale, ...)]. Dunque un modello esterno di un concetto personalmente costruito è la sua proposta comunicativa *consapevole* in una qualche forma di linguaggio, proposta fatta per necessità di (o per desiderio di) comunicare.

Abbiamo usato consapevolmente il verbo “tradurre” perché si tratta di una vera e propria *traduzione* e molta ricerca degli anni fine '80 e inizio '90 si è

occupata dei modi nei quali avviene tale traduzione e delle influenze che hanno fattori quali personalità, stile cognitivo, ambiente eccetera su alcune caratteristiche di essa (per esempio la *lingua interna* e la *conoscenza tacita*) (Bara, 1990, cap. 5; D'Amore, 1993, 2014).

Molti sono gli studi compiuti a proposito di tale *traduzione* ed è stata rilevata in essa, per esempio, una forte prevalenza di una modalità iconica rispetto a una verbale (Johnson-Laird, 1972). In base a questi esperimenti, fu mostrato che, solo dopo una fase di familiarizzazione con il testo di un problema, il risolutore potenziale passa da una fase visiva a una linguistica. Seguendo le parole di Pellerrey (1984), ciò costituisce “la controprova di quanto individuato da Haslerud e Meyer e cioè l’influsso inibitorio prodotto da un eccessivo uso della verbalizzazione nella fase della soluzione di un problema” (p. 449).

Il celeberrimo psicologo statunitense Jerome Bruner ha dato un’interessante versione di questa problematica, ritornando a un’idea originale di Piaget, secondo la quale lo sviluppo del bambino comporta successive ristrutturazioni di fatti e relazioni; queste hanno origine e si manifestano attraverso interazioni tra pari, con l’ambiente e grazie a interventi che i bambini fanno sull’ambiente. Ma: come si rappresenta tutto ciò nella mente del bambino? Negli anni ’60 Bruner (1960, 1964a, 1966) studiò il problema giungendo a sostenere che i bambini si fanno una vera e propria *rappresentazione cognitiva*. Essa fu studiata da Bruner (1964b) proprio nel caso specifico della matematica e del *problem solving* matematico. Egli distingue tre modi di rappresentazione:

- *Esecutiva*: si rappresentano eventi passati con un atto motorio, come quando il bambino agita la mano vuota in ricordo di un sonaglio; secondo Bruner, questo è il motivo per cui si è capaci di condurre una bicicletta anche dopo anni che non lo si fa.
- *Iconica*: passiamo dal concreto del reale al mondo delle immagini mentali astratte: il bambino ricorda, cioè re-immagina, una manipolazione concreta eseguita; si tratta di un riassunto mentale di eventi reali; altro esempio: un adulto che dà indicazioni su un percorso a uno straniero, immaginando sé stesso nel compiere tale percorso; oppure la ricostruzione di una successione ordinata di oggetti pensata ma non concretamente realizzata.
- *Simbolica*: rappresentazione di qualche cosa con puri simboli, per esempio cinque oggetti con la parola *cinque* o con il simbolo aritmetico 5; questo è il livello più alto, quello di solito richiesto in matematica fin dai primi giorni di scuola: l’entrata in contatto con queste rappresentazioni dà all’allievo una nuova possibilità di pensiero astratto.

Secondo Bruner (1964a, b, 1966) questi *modi della rappresentazione* avvengono e si sviluppano proprio in questa successione e ciascuno è la base cognitiva necessaria per il successivo, e anzi sono tra loro collegati in modo

evolutivo.

A prima vista, sembra esservi coincidenza con una teoria dell'evoluzione cognitiva a stadi, alla Piaget. Ma non è così; mentre l'insegnante che segue la teoria piagetiana quando verifica che l'allievo non è ancora nello stadio adatto a una certa attività o a un certo concetto non può far altro che aspettare, l'insegnante alla Bruner è invitato dallo stesso ad affrontare qualsiasi tema. Secondo Bruner, ogni concetto è apprendibile da allievi di qualsiasi età, se lo si riesce a rappresentare in quei tre modi nell'ordine. Per dimostrare ciò, è ben noto che egli si lanciò in avventure didattiche che lo portarono a sviluppare discorsi algebrici di una certa complessità già nella scuola primaria. Naturalmente la nostra frase cautelativa precedente ("se lo si riesce a rappresentare in quei tre modi") è di vitale importanza per capire il senso della proposta di Bruner ...

Gli studi di Bruner non sono mai stati del tutto abbandonati, anche se sono stati oggetto di critiche, soprattutto legate sia alle modalità di passaggio dal modello interno a quello esterno, sia alle modalità di rappresentazione dei modelli esterni.

Per la DdM, questo tipo di temi ha grande interesse, dato che tutta la comunicazione matematica avviene attraverso modelli esterni. Detto in altre parole, non sapremo mai qual è il modello mentale (interno) che un determinato allievo si è fatto, per esempio, delle tre altezze di un triangolo. Se anche glielo chiedessimo, non otterremmo altro che il risultato di quella *traduzione* di cui dicevamo sopra, cioè una qualche forma di modello esterno; dopo di che, ri-tradurre in senso inverso per risalire al modello mentale interno di quell'allievo è impossibile ... Nel corso di colloqui o di interviste, a causa di alcune clausole del contratto didattico o del contratto sperimentale (D'Amore, 1999), l'allievo non solo non potrà che dare modelli esterni, ma anzi cercherà di dare modelli esterni falsati dal desiderio di renderli vicini a quelle che ritiene essere le attese dell'insegnante o del ricercatore, più che al suo modello interno (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

Tramite tecniche di indagine piuttosto sofisticate, però, si riesce a far sì che lo studente si svincoli dal rapporto con l'insegnante-valutatore e dall'immagine dell'aula come luogo di ... ricerca del consenso adulto. Se lo studente accetta di esprimersi in un linguaggio naturale, per esempio come se dovesse rivolgersi a un bambino più piccolo per spiegargli con le sue parole che cosa sono le altezze di un triangolo (tanto per proseguire con il precedente esempio), in situazione non di routine, semmai in assenza dell'insegnante e con l'accordo che il suo lavoro non sarà oggetto di valutazione, allora si possono avere informazioni che, senza ingenuamente pensare siano la descrizione esatta del modello mentale (interno), sono però piuttosto personali, profonde e rivelatrici.

A proposito dell'esempio, *non* scelto a caso, ecco come una ragazza di II media (grado scolastico 7, dunque di 12–13 anni), fingendosi adulta e mamma,

spiega a un supposto figliolo di 7 anni perché i triangoli hanno tre altezze [il testo è riportato integralmente, così come appare sul protocollo originale, conservando un piccolo errore dell'autrice]:¹

Simona: “Figlio mio, la geometria tu non la conosci però voglio spiegarti che cosa vuol dire altezza. Come te, io, e papà abbiamo un'altezza, che si misura dalla testa ai piedi, anche i triangoli ne hanno una, però la loro si misura dal vertice che è un puntino fino alla base che sono come i nostri piedi. Però dato che loro hanno 3 puntini (vertici), hanno tre altezze perché hanno i nostri 3 paia di piedi. E dato che noi abbiamo una sola testa e un sol paio di piedi, abbiamo solo un'altezza”. (D'Amore & Sandri, 1996, p. 239)

Ora, non è affatto detto, ovviamente, che il modello mentale di Simona sia quello antropomorfo che si potrebbe indurre dalla sua efficacissima descrizione a parole (sarebbe oltremodo ingenuo ragionare così ...); ma certo ottenere questo tipo di modello esterno in forma verbale scritta richiede attenzioni pedagogiche notevoli e ci dà molte informazioni su come Simona si è immaginata una ... soluzione figurata cognitiva (un opportuno modello) per accettarlo. (La ricerca completa è descritta in: D'Amore & Sandri, 1994, 1996).

Studi sui modelli esterni sono stati molto sviluppati e diffusi negli anni '90; per le sue intrinseche difficoltà, invece, furono scarsi gli studi sul legame tra modello mentale (interno) e modalità della sua traduzione in un modello esterno. Essi sarebbero invece di grande rilevanza per la DdM (e forse l'interesse potrebbe essere assai più generale).

2.6. *Frame e script*

Ci sembra doveroso, in una riflessione sui modelli, inserire almeno poche righe su *frame* e *script*, termini che hanno dominato gli studi e le ricerche all'inizio della DdM negli anni compresi fra il 1970 e il 1990, per poi lentamente eclissarsi.

Nello studio delle varie teorie dell'educazione, un ruolo spesso trascurato, ma di rilevanza notevole soprattutto per chi si occupa di didattiche specifiche, riguarda la *natura dei contenuti* e la loro *modalità di presentazione*. Ora, per quanto concerne questo secondo aspetto, si può ricorrere a qualche sequenza, per esempio dettata da *gerarchie di apprendimento*, come suggeriva un primo Gagné (1965, 1985)² o da qualche tassonomia (ce ne sono tantissime datate

¹ Riportiamo il testo esatto che costituiva la consegna: “Fa' finta di essere una mamma ... Il tuo bimbo, che ha 7 anni, ha sentito dire che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: ‘Mamma, che cosa vuol dire?’. Niente di peggio che eludere la domanda di un bambino piccolo; dunque, tu decidi di rispondergli”. Erano dati 5 testi-consegne diverse a ogni classe, distribuite a caso tra gli allievi (D'Amore & Sandri, 1996, p. 230).

² Va detto che Robert Gagné pubblicò questo stesso libro una prima volta nel 1965 con la Holt, Rinehart & Winston Inc. (noi però consultiamo la successiva ristampa inalterata del 1973). Nel 1985 lo ripubblicò profondamente modificato nella concezione generale, ma con lo

'70 e '80, ma oggi sono del tutto scomparse); oppure si può ricorrere a una presentazione organica di concetti generali, in qualche modo anticipatoria, come suggerisce Ausubel (1968).

Tra le tante possibili modalità, Bateson (1972) insiste sulla funzione dei *frame* come vere e proprie *cornici* atte a ... inquadrare diversi contenuti comunicativi; tali contenuti possono essere offerti dalle culture scientifiche e costituiscono modalità di analisi che sono condivise nell'ambito di una stessa comunità anche e soprattutto se utilizzate all'interno della formazione dei futuri docenti (tema assai scottante allora e tutt'oggi, diventato addirittura tema di ricerca scientifica).

Riprendendo Chafe (1977), un'attività di *framing* è un'attività di riduzione in schemi nella quale un insegnante (ma la cosa vale anche più in generale) sceglie la modalità generale di esposizione di un argomento; dunque sceglie una sequenza, e decide che cosa e come esporre. Naturalmente la cosa si può invertire e, invece di vederla solo nel verso *insegnamento*, la si può vedere nel verso per così dire opposto, *apprendimento*. Vi torneremo tra breve.

L'idea di *script* (letteralmente: *copione*, di teatro o di film) è stata introdotta da Schank e Abelson (1977). In parole semplici, si tratta di quanto segue. Chi impara non è del tutto privo di conoscenze sul tema *nuovo* che l'insegnante intende proporre iniziandolo da capo. In realtà c'è un contenuto-contesto al quale qualsiasi competenza fa riferimento, al momento della proposta da parte dell'insegnante, nella mente dell'allievo. Ci sono allora delle *strutture di aspettativa*, cioè degli *schemi anticipatori*. Quando queste strutture, questi schemi, sono di tipo procedurale, allora assumono il nome di *script*. Un esempio che abbiamo sentito fare a voce da un autorevole psicologo è relativo all'apprendimento di modalità di comportamento da parte di un bambino in un'occasione pubblica. In una precedente occasione, il bambino ha vissuto, evento per evento, tutti i momenti di una successione che costituisce per lui questa occasione pubblica, per esempio: mangiare con genitori e amici dei genitori al ristorante. In una nuova occasione analoga, il bambino arriva all'appuntamento essendosi già costruito un'immagine – aspettativa di quel che accadrà. Si è cioè già *scritto* (per così dire) un copione della serata.

Quella qui sopra presentata è addirittura talvolta usata come tecnica didattica da parte di insegnanti specializzati (cosiddetti “di sostegno”, in Italia) per aiutare quegli allievi in difficoltà che fanno fatica a capire com'è organizzata la giornata scolastica e che dimostrano ansia in classe, proprio legata alla mancanza di comprensione di tale organizzazione. Spesso questi allievi sono tesi, finiscono con l'essere elemento di disturbo, ma solo perché non sanno contenere l'ansia derivante da una mancanza di previsione a breve

stesso titolo, con la Cbs College Publishing, mentre la traduzione oramai avviata da anni, in italiano, era stata condotta sulla prima edizione, e uscì solo nel 1987. Per cui uscì in italiano solo il primo Gagné, mentre negli USA egli aveva rivisto totalmente la sua posizione. Su tutto ciò in dettaglio, si può vedere D'Amore (1993, 2014).

termine. Sappiamo allora che taluni insegnanti creano un'agenda-calendario orario, fanno sì che l'allievo se ne appropri, e ne calmano le ansie: hanno creato un copione della giornata scolastica disponibile per un controllo costante.

Secondo alcuni, l'apprendimento stesso potrebbe essere ripensato come attività di creazione di *frame* e come capacità di modificare *script*. Non c'è in fondo una grande differenza tra *frame* e *script*: in entrambi i casi c'è una sorta di struttura cognitiva d'attesa:

- relativa a una sorta di inquadramento generale, nel caso dei *frame*;
- relativa a procedure più specifiche (per esempio una successione di eventi già vissuti) nel caso degli *script*.

Da un certo punto di vista, *frame* e *script* rappresentano qualche cosa di molto vicino a immagini, rappresentazioni e modelli mentali. Negli anni '80 si era creata l'idea che l'attività di apprendimento matematico potesse essere rivisitata anche in funzione di questi concetti (Pontecorvo & Pontecorvo, 1985).

Il termine *frame* ha anche un'altra origine, quella proposta da Minsky (1975) in ambiente di intelligenza artificiale; si tratta di "una struttura di dati che serve a rappresentare una situazione stereotipata quale stare in un certo tipo di soggiorno o andare al compleanno di un bambino" (p. 230).

In realtà, anche in questo caso si tratta di uno schema di attese che, proprio per come è descritto, in termini di "rete di nodi e di relazioni", rientra tra gli schemi (termine da noi già usato finora in modo intuitivo, ma sul quale dovremo tornare tra poco).

Sempre allo scopo di ricercare gli anticipatori di questa idea, ricordiamo che anche Winograd (1975) fa uso di questo termine in ambito di rappresentazione della conoscenza, nel descrivere una gerarchia del legame tra giorni e date, quando afferma che "associato ad ogni nodo della gerarchia c'è un *frame* che tiene insieme la conoscenza che abbiamo di quel concetto" (p. 191).

Si può dunque concludere dicendo che, giungendo dagli ambiti di ricerca più disparati, ma non tutti lontani dal mondo dello studio del cognitivo, l'idea di *frame* è giunta a Schank e Abelson che, come abbiamo visto, nel 1977 l'hanno introdotta nell'ambito della psicologia della conoscenza, e ha fatto poi capolino negli anni '80 nel mondo della DdM.

Torniamo ora a una problematica molto concreta, assai più vicina al mondo della scuola. È stata a lungo oggetto di dibattito la seguente questione: Immaginarsi la scena descritta dal testo di un problema (pensando il testo nel suo registro "narrativo"), aiuta nella risoluzione oppure ciò è indifferente? Cioè: Fino a che punto deve spingersi la verosimiglianza tra quel che è descritto o richiamato nel testo e la realtà immaginata, sollecitata dalla lettura del testo, al momento della risoluzione del problema?

Molti ricercatori sembrano concordare negli anni '80 sul fatto che vi *debba*

essere una buona immaginazione e che, anzi, essa risulti a volte indispensabile per la risoluzione. Stiamo pensando a Johnson-Laird (1983), a Vergnaud (1985), a Paivio (1986) e ad altri.

Questo genere di domande, a nostro avviso, riguarda sia concetti generali di modelli (in più d'uno dei sensi delineati in precedenza), sia *frame* e *script*, perché la lettura del testo di un problema, se considerato come testo narrativo, spinge a ideare una situazione nella quale il risolutore può rivedere sé stesso o rivedere qualche cosa di esperienzialmente già vissuto o potenzialmente tale. Per esempio, risolvere i famosi problemi di addizione proposti da Vergnaud (1985) costringe a ideare una situazione personale concreta che coinvolge il risolutore come persona fisica, altrimenti risulta impossibile, almeno nella scuola primaria.

Ricerche molto approfondite hanno però ampiamente dimostrato che tale legame non c'è o, per lo meno, non è così vincolante e diretto. Per esempio, l'ipotesi secondo la quale la presenza di parole incognite nel testo, inibendo la possibilità di farsi immagini mentali circoscritte e dettagliate della situazione (cioè veri e propri *script*), riduca la percentuale di risoluzioni esatte del problema, è certamente falsa. Si vedano i risultati della ricerca sulla risoluzione dei problemi nei quali appaiono parole inesistenti, come “orettole” e altre (D'Amore, 1997): lo studente risolve ugualmente il problema, attribuendo a quella parola altri significati, per assonanza o con colpi di fantasia.

Immaginarsi la situazione descritta dal testo di un problema e utilizzare tale immagine per risolvere il problema è dunque una faccenda assai più complicata di quanto possa apparire; l'immagine della situazione descritta non ha necessità di dettagli, di rifarsi a modelli realistici, ma può anche limitarsi a situazioni vaghe, sfumate, anche non realistiche. Naturalmente viene in mente la “debolezza” di Holt (1964), il fatto di essere di fronte a qualche cosa di “sfuocato”, così come diceva in tante occasioni Piaget.

Le prove di nostra conoscenza sono state fatte non solo con studenti di scuola primaria (gradi scolastici da I a V), ma anche di scuola media (gradi scolastici fra VI e VIII), con risultati del tutto simili. Una frase ci ha fatto riflettere molto. In una delle volte in cui, come intervistatori forse esageratamente espliciti, abbiamo cercato di indagare più a fondo su questa faccenda, intervistando allievi, di fronte alla nostra insistenza a cercare di capire che cosa uno studente dodicenne si fosse immaginato di una situazione descritta nel testo di un problema facendo uso di parole senza senso, questi, spazientito, ci ha detto che lui non si era immaginato niente perché: “L'importante non è capire, ma risolvere il problema”, il che la dice lunga sulla situazione che la matematica vive in aula. [Per avere maggiori dettagli su questa ricerca e sulla connessione con il tema dei problemi in aula nel corso di attività didattica, si veda: D'Amore (1993, 1997, 2014) e D'Amore e Fandiño Pinilla (2006a)].

L'attualità di queste analisi e il proliferare tutt'oggi di ricerche su questi temi ci convince che le precedenti proposte terminologiche non sono oggi del tutto fuori luogo.

2.7. *Frame e script*

I processi cognitivi organizzano l'attività e il suo funzionamento in situazione: cioè la condotta, la rappresentazione, le competenze definiscono e determinano lo sviluppo delle forme di organizzazione dell'attività di un soggetto nel corso della sua esperienza. Dunque, i processi cognitivi non riguardano solo il funzionamento in situazione, ma anche lo sviluppo, cioè l'evoluzione, delle competenze e delle loro relazioni nel corso dell'esperienza. Seguendo Piaget, lo diciamo con una frase contundente: *conoscenza è adattamento* (Piaget, 1967, 1970; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1948).

Ma *chi* si adatta, e a *che cosa*? Ciò che si adatta sono non solo gli esseri umani *tout court*, ma gli schemi, cioè le forme esplicite di organizzazione dell'attività: gli schemi si adattano alle situazioni per raggiungere la conoscenza (o comunque il traguardo auspicato). O, meglio: gli esseri umani adattano i loro schemi allo scopo di appropriarsi di una conoscenza. Meglio ancora: l'essere umano si appropria di una conoscenza se sa adattare i propri schemi a una nuova situazione, il che gli permette di apprendere. Il saltatore in alto novizio decide di cambiare allenatore, scegliendo una persona competente che gli insegnerà come modificare, allo scopo di migliorarli, i suoi schemi di base: rincorsa, stacco, rotazione, superamento. La modifica degli schemi può essere deliberata, ossia frutto di una scelta consapevole, o no. Gérard Vergnaud fece circa 5 lustri fa quasi in questo senso l'esempio del salto con l'asta, durante uno stage presso l'università di Torino.

Risulta fondamentale dunque evidenziare la coppia: situazione-schema, cosa che né Piaget, né Vygotskij hanno fatto, mentre ciò appare nell'opera di Vergnaud (distribuita in diverse opere tra la fine degli anni '80 e la fine dei '90). Tale relazione è fondamentalmente dialettica: non c'è schema senza situazione, ma neppure situazione senza schema. Perché è lo schema che permette di identificare una situazione come facente parte di una certa classe di situazioni, in quanto uno schema si dirige effettivamente sempre a una classe di situazioni, per la sua stessa natura generale e non univoca. Perciò lo schema è sì un fatto universale, ma in continua evoluzione possibile.

L'apprendimento necessita di una situazione di partenza, la quale si organizza in schemi apprenditivi e modalità (per esempio, la *teoria delle situazioni* di Guy Brousseau) (Brousseau, 1997); a volte gli schemi sono cercati, a volte sono insiti nell'esecuzione e nel processo; a volte sono il frutto di ingegnerie (Brousseau, 2008; D'Amore, 2008).

Nota 2.

Non possiamo qui non ricordare la famosissima e citatissima definizione di

concetto data da Vergnaud (1990), basata proprio sull'idea di schema, in ambito assai più generale di quello cognitivo; il concetto C sarebbe la terna ordinata (S, I, S) nella quale:

S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);

I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il *significato*);

S è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*). (D'Amore, 1999, p. 208)

Si veda anche la voce “Gérard Vergnaud” sulla *Enciclopedia Pedagogica* a cura di Mauro Laeng (D'Amore, 2002).

Questa posizione, in passato presa in esame fortemente da tutti gli studiosi di DdM, è ora caduta un po' in disuso, per fare spazio a nuove concezioni; a nostro avviso, questa posizione di Vergnaud è un'idea anticipatrice sia della nozione di *attività riflessiva* nella teoria della oggettivazione di Luis Radford (Radford, 2006b; Santi, 2011), sia della nozione di *pratiche operazionali e discorsive* nella teoria EOS di Juan Diaz Godino (Godino & Batanero, 1994; D'Amore, Font, & Godino, 2007; D'Amore & Godino, 2007).

Va ricordato che l'idea di *concetto* in Duval non è ternaria ma binaria: concetto = (segno, oggetto) (si vedano Duval, 1993, 1995, 1998; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017).

In un'ottica di ricerca in DdM in chiave storica, questi temi andrebbero accuratamente ripresi in esame.

2.8. Schemi e campi concettuali

In forma riassunta:

- Uno schema è una totalità dinamica funzionale.
- Uno schema è un'organizzazione invariante dell'attività per una classe definita di situazioni.
- Uno schema comporta quattro categorie di componenti:
 - uno scopo (o più d'uno), dei sottoscopi e delle anticipazioni;
 - delle regole d'azione, di presa d'informazione e di controllo;
 - degli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto);
 - delle possibilità di inferenza.
- Uno schema è una funzione che tiene conto del passare del tempo dato che assume valori di entrata e fornisce quelli di uscita in uno spazio temporalizzato; per capire bene questo punto occorre pensare a uno schema evolutivo.

Per sua natura, dunque, lo schema è l'espressione circoscritta e finita di una generalizzazione (semmai in atto).

L'idea generale dalla quale si sta prendendo tutto ciò è sostanzialmente

riconducibile a Immanuel Kant; ma Kant non arriva a mettere in relazione schemi e concetti nella loro reciprocità; questo viene fatto solo nella teoria dei campi concettuali (Vergnaud, 1990), nata proprio dal bisogno di teorizzare il lento processo di costruzione-appropriazione degli schemi e dei concetti. In tale teoria, sono essenziali due elementi posti in evidenza ancora da Vergnaud (già citati in precedenza):

- *concetto-in-atto*: concetto ritenuto come pertinente, come valido, in una certa situazione, descritto da un certo schema o da un'interazione fra schemi;
- *teorema-in-atto*: proposizione del tipo “se A allora B” ritenuta vera in una certa situazione, ma generalizzabile a un dominio di situazioni fino a una situazione non contestuale.

Un *concetto* è allo stesso tempo un insieme di situazioni (quelle che danno senso al concetto), un insieme di invarianti operatori (cioè di concetti-in-atto e di teoremi-in-atto che organizzano gli schemi, i trattamenti di queste informazioni) e un insieme di rappresentazioni simboliche e linguistiche che permettono di esprimere gli oggetti e le relazioni presenti nelle situazioni concernenti, eventualmente, i rapporti che essi hanno con le caratteristiche degli schemi. Su questa strada incontriamo due accezioni (almeno) di *concetto*:

- concezione, quando si parla di un soggetto;
- concetto vero e proprio, quello elaborato dalla cultura.

Non si può capire lo sviluppo di un concetto senza inserirlo in un sistema e si è poi obbligati a studiare questo sistema, il campo concettuale, per potersi appropriare del concetto. Un *campo concettuale* è dunque allo stesso tempo un insieme di situazioni (meglio: di classi di situazioni) e un insieme di concetti, insieme nel quale non tutte le proprietà si sviluppano nello stesso tempo nel corso dell'esperienza e dell'apprendimento.

Ma c'è sempre uno scarto fra la forma operatoria della conoscenza, quella che si usa nell'azione, e la forma predicativa della conoscenza, fatta di parole e di enunciati.

Il lavoro del didatta non è quello di lavorare sulla conoscenza del soggetto apprendente, ma sulle condizioni create dalla situazione messa in campo nella situazione di apprendimento, ovviamente tenendo in massimo conto gli schemi e l'adattamento.

Lo schema, ci insegna Vergnaud, è una totalità dinamica funzionale, la cui funzionalità è relativa appunto a questa totalità nella sua interezza, non dunque a quella relativa all'uno o l'altro dei suoi componenti.

E tuttavia, l'analisi delle componenti dello schema è altrettanto essenziale dell'analisi dello schema nella sua interezza, quando si vuol analizzare l'efficacia di uno schema. È il solito dibattito tra olistico e costitutivo. Il saltatore in alto può essere padrone assoluto di ciascuna delle componenti

schematiche della sua azione sportiva, ma perdere di vista la successione nella sua totalità.

Che cosa caratterizza uno schema, quali sono le sue componenti?

Per prima cosa, lo scopo per il quale lo schema è costruito, spesso con dei sottoscopi: stabilire o riconoscere qual è l'intenzione che spinge a costruirlo o idearlo o metterlo in atto, espresso in termini di motivazione, interesse, scopo, bisogno.

Ci sono poi le componenti generative, cioè le regole da seguire, le informazioni da tenere in conto, tutto quel che riguarda il controllo. In tutto ciò ha un'importanza enorme la componente temporale.

Oltre a queste componenti [regole d'azione, messe in evidenza nel lavoro classico pionieristico di Allen Newell e Herbert Simon, creatori nel 1956 del *Logic Theory Machine* e nel 1957 del *General Problem Solver* (GPS)] (Russell & Norvig, 2003), ci sono tutte le componenti non osservabili con inferenze interne e il ruolo della memoria, più o meno esplicite e volontarie (e così, torniamo a sfiorare la psicologia).

Finalmente torniamo ancora una volta alle componenti degli invarianti operatori di Vergnaud, i concetti-in-atto e i teoremi-in-atto; essi costituiscono le componenti epistemiche di uno schema, essendo a loro affidato il compito di individuare gli oggetti in gioco nonché le proprietà singole, le relazioni e le trasformazioni, non solo quelle osservabili, come quelle semiotiche, ma anche quelle implicite. Gli invarianti operatori mettono in gioco le informazioni e le inferenze, con una funzione di concettualizzazione e di deduzione, come categorie concettuali.

Come ultima componente dello schema, si impone l'inferenza stessa, indispensabile alla teoria, grazie alle regolazioni locali, agli aggiustamenti, ai controlli, visto che mai avviene un'azione totalmente automatica, almeno nell'apprendimento. L'azione di adattabilità degli schemi è essenziale. Le regole d'azione, di assunzione di informazione e di controllo sono la traduzione pragmatica dei teoremi-in-atto di Vergnaud; esse interpretano il fatto che le varianti di una situazione possono in generale assumere più valori e i soggetti sono in grado di adattarsi a questi valori.

Lo schema struttura un'attività, nelle sue due componenti essenziali:

- la sistematicità, che si estrinseca nelle regole univoche cui sono soggette le attività (per esempio gli algoritmi aritmetici o algebrici);
- la contingenza, perché le regole cui obbedisce lo schema devono tener conto delle diverse situazioni di azione o di interpretazione cui lo schema si trova di fronte (diciamo così: una sorta di regola di opportunità).

L'idea di schema apporta una risposta teorica di grande interesse alla psicologia cognitiva pur restandone in grande misura esterna; per esempio la questione dell'adattamento a situazioni nuove, per esempio la risoluzione dei problemi, è ben teorizzata nell'idea di schema, proprio grazie alle quattro componenti che abbiamo visto. Ma questo non comporta, come molti

vorrebbero, come è stato auspicato ingenuamente fino a pochi anni fa, come stupidamente ancora qualcuno sostiene o auspica, la degenerazione da situazioni di risoluzione di problemi a situazioni di algoritmizzazione di ipotetici passaggi componenti (Brousseau & D'Amore, 2008).

Nota 3.

Avendo citato Kant, immagini, modelli e schemi non possono non richiamare alla mente le forme *a priori* kantiane, come la base costitutiva di tutti e tre questi temi, dato che essi potrebbero essere pensati come le forme *a priori* cui la mente si assoggetta o alle quali ricorre per organizzare i dati sensoriali i quali acquisiscono un senso solo sulla base della cultura. Non si può non vedere qui la base di quelli che Radford chiama “concetti di ragione” (Radford, 2004; Santi, 2011).

2.9. La rappresentazione

Il concetto di *rappresentazione* coinvolge alcuni punti chiave: la percezione, i sistemi significante-significato, la concettualizzazione (in atto), lo schema.

Percepire significa porsi in relazione con gli oggetti reali, le loro proprietà e relazioni osservabili, identificabili e separabili cioè distinguibili. La distanza che c'è tra percepire e rappresentare sta nel fatto che la rappresentazione si occupa anche di oggetti, proprietà e relazioni non direttamente osservabili. Ne è anzi una componente essenziale. La percezione non è fatto scevro da bisogni cognitivi dato che questi necessitano di esperienza e di cultura.

La lingua materna e le altre forme simboliche sviluppate dalle società per comunicare e rappresentare costituiscono dei sistemi di significanti e significati; essi contribuiscono in modo notevole al funzionamento della rappresentazione. Poter fare uso di parole per identificare oggetti e loro relazioni, dà ai concetti uno statuto cognitivo decisivo. La rappresentazione dunque non è solo l'esplicitazione di qualche cosa all'interno di un lessico o, più in generale, di un sistema semiotico. Vi sono invarianti espliciti e impliciti che devono tenere in debito conto la comunicabilità, ma anche la possibilità di esplicitazione che porta a una stabilità necessaria per la rappresentazione stessa. Gli invarianti operatori sono le componenti principali della concettualizzazione: nell'attività essi si formano ed è nel corso dell'attività che producono i loro effetti, essenziali per la percezione specie per quanto riguarda l'informazione specifica per l'azione. Hanno un ruolo altrettanto importante delle inferenze che sono sempre state privilegiate come oggetto di studio da Aristotele a Kant, fino al primo Wittgenstein.

Gli schemi costituiscono una componente assolutamente essenziale della rappresentazione, dato che essa è un'attività e dunque uno schema può nel suo corso costitutivo prendere forma e agire come è nella sua possibilità più significativa. Anzi, lo schema gioca proprio nell'ambito della rappresentazione la sua componente più significativa.

La rappresentazione può dunque essere pensata come la riorganizzazione di schemi.

Qualsiasi teoria della rappresentazione mette in gioco, per la sua stessa esistenza, un flusso di coscienza, una presa di coscienza ma anche processi incoscienti. Senza il flusso di coscienza (percezione e immaginazione), l'essere umano non sarebbe in grado di rappresentare né saprebbe riflettere su quel che è una rappresentazione.

Non bisogna dimenticare la dualità sempre presente cosciente-incosciente che riguarda gli invarianti operatori e che permette la coscientizzazione come momento chiave della concettualizzazione, cioè l'identificazione degli oggetti e dei processi della realtà, osservabili e non. Ciò spiega perché si tende oggi a mescolare e non più a gerarchizzare il cognitivo e il metacognitivo.

Su questo tema, in termini attuali, si può vedere Font, Godino e D'Amore (2007, 2010).

3. Termini esplicitamente connessi al sostantivo “didattica”

3.1. *Didattica*

Si può intendere per *didattica disciplinare* lo studio dei processi di trasmissione e di appropriazione dei saperi e dei saper-fare relativamente a ciò che questi processi hanno di specifico rispetto a un contenuto, tenendo conto di alcuni fattori che precisiamo di seguito (D'Amore & Frabboni, 1996, 2005; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007b).

a) Vogliamo includere in questa descrizione del termine, tanto la *didattica delle discipline* (come la DdM) quanto la *didattica professionale* (per esempio quella che si sviluppa nei corsi di formazione professionale di un dato apprendimento di fronte a situazioni molto specifiche: formazione all'interno di una ditta, insegnamento-apprendimento di un mestiere, spiegazioni sul funzionamento di un apparato, apprendistato sportivo: come effettuare efficacemente un salto in alto etc.).

b) Vogliamo evidenziare una volta tanto un elemento troppo sottaciuto e cioè quanto sia di rilevante importanza la *durata* del processo di trasmissione; un processo come quello scolastico, il cui risultato positivo o negativo si misura in anni, ha una sua specificità ben diversa da quella di una semplice comunicazione su un atto da compiere, per esempio dato da un professionista a un apprendista in un caso specifico. Il fattore “durata del processo di insegnamento-apprendimento” non viene quasi mai messo in evidenza negli studi.

c) È di rilevante importanza la *situazione* nella quale si svolge il processo; ne siamo così convinti da affermare che la situazione determina il processo (in bene o in male).

Prima di proseguire, vogliamo far notare come la specificazione del contenuto differenzia nettamente e senza alcuna possibile confusione l'azione didattica dalla psicologia. La psicologia dell'apprendimento si è sviluppata

secondo modelli assai diversi: il comportamentismo, il cognitivismo, il modello dell'apprendimento per intuizione o *insight*, per imitazione personale o imitazione sociale e il connessionismo (Rumelhart & McClelland, 1986).

Per esempio, la psicologia dell'apprendimento studia i meccanismi dell'attenzione, cosa che le didattiche disciplinari non fanno (meglio: non hanno gli strumenti per fare; meglio ancora: lo studio di quegli strumenti non rientra fra i loro scopi).

Torniamo al discorso precedente.

Che differenza c'è tra didattica di una disciplina da un punto di vista scolastico e didattica professionale? A nostro avviso, sono i processi di concettualizzazione che fanno la differenza: la didattica di una disciplina fa necessariamente riferimento all'epistemologia di quella disciplina, nel senso che è impensabile una didattica della disciplina *d* che non chiami in causa non solo *d*, ma anche l'epistemologia di *d*.

Questo genere di riflessioni sulla specificità, sembra non avere fine; nel caso specifico della matematica, possiamo segnalare almeno 5 aspetti specifici del suo apprendimento (Fandiño Pinilla, 2008):

- apprendimento concettuale
- apprendimento algoritmico
- apprendimento strategico (es.: la risoluzione dei problemi)
- apprendimento comunicativo
- apprendimento semiotico (es.: gestione delle rappresentazioni e trasformazioni di trattamento e conversione).

Qualsiasi professionista del processo di insegnamento-apprendimento a lungo periodo, per esempio scolastico o universitario, può confermare che questa ripartizione specifica ha non solo una valenza teorica, ma anche e soprattutto un senso empirico, di grande interesse: i problemi che gli allievi incontrano in un campo concettuale sono diversi da quelli che incontrano in un altro, differenti sono anche i problemi di concettualizzazione; e così via.

Tutto questo discorso non sembra avere l'analogo nell'apprendimento professionale usuale. Per cui è fortemente scorretto cercare di far passare l'idea che ha cercato di imporsi pochi anni fa, che lo studente a scuola è come un apprendista in fabbrica; i processi sono indubbiamente assai diversi. Inoltre: un docente non è semplicemente un tecnico in grado di risolvere problemi circoscritti, spesso simili; un docente è un professionista che deve mettere in campo conoscenze vaste e complesse e saper prendere decisioni ad ampio raggio, spesso di natura complessa.

Anche l'idea di *valutazione di una competenza* deve essere rivista criticamente; all'ex apprendista si può proporre una prova pratica di valutazione della competenza raggiunta al termine dell'addestramento; al neofita del salto in alto si può semplicemente proporre di superare l'asticella posta a 2 m di altezza: o la supera o no; ma valutare le competenze di uno

studente in aula è assai più complesso, a nostro avviso impossibile con test (come dimostra il fallimento in questo senso di valutazioni ispirate a questo modo di vedere, in vari Paesi del mondo). Questo spiega il fatto che il vasto e prolungato dibattito internazionale sulla valutazione delle competenze a scuola si sia sempre arenato e faccia tanta fatica a essere definito in termini chiari e univoci e il perché gli insegnanti facciano giustamente così fatica a fare proprio questo discorso, trasformandolo in attività oggettivamente valutabili (Fandiño Pinilla, 2011).

3.2. Competenza

Da sempre in modo ovvio, più di recente in maniera caparbia e forse un tantino esagerata, nel processo di insegnamento-apprendimento si chiama in causa la competenza; ci riferiamo qui all'accezione data in D'Amore, Godino, Arrigo e Fandiño Pinilla (2003). Stante la difficoltà di interpretare concretamente come trasformare richieste istituzionali in attività didattiche concrete ma concettualmente fondate, abbiamo in passato lavorato e riflettuto molto sul tema (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003, 2006b, 2007a; Fandiño Pinilla, 2005, 2006, 2011, 2015).

Se la competenza è ritenuta essere un fattore valutabile, allora deve essere misurabile e dunque ha senso parlare del valore di una competenza e dunque fissare un ordine di maggior o minor competenza individuale; in maniera molto banale si può cominciare con un po' di buon senso intuitivo (ci ispiriamo a colloqui informali fatti con Gérard Vergnaud):

- A è più competente di B nel campo C se sa fare qualche cosa in C che B non sa fare;
- A è più competente nel campo C nel tempo t' che non nel tempo t ($t < t'$) se A sa fare qualche cosa in C nel tempo t' che non sapeva fare nel tempo t ;
- A è più competente di altri se si comporta in una maniera migliore o più efficace: più rapido, meglio compatibile con il modo di fare di terzi;
- A è più competente di altri se dispone di un repertorio di processi alternativi che gli permettono di adattare il suo comportamento ai diversi casi che gli si possono presentare;
- A è più competente di B se egli è più efficace di fronte ad una nuova situazione, rispetto a quanto non lo sia B;
- ...

In questo repertorio (assai superficiale e non certo esauriente) di casi, si nasconde la base dell'idea di *misura di una competenza*.

Ma il concetto di *competenza* non è, di per sé, scientifico; per una sua sistematica presentazione si ha bisogno di analizzare un'attività, il che significa chiamare in causa gesti, ragionamenti, operazioni scientifiche e tecniche, motivazione, volizione, impegno, desiderio, affettività, ... tutti elementi che non (sempre) si prestano con efficacia (e semplicità) a

misurazioni oggettive.

Serve un concetto forte per designare le forme di organizzazione dell'attività in situazione, e in questo ci aiuta il concetto di *schema* elaborato all'interno della teoria dei campi concettuali.

3.3. *Situazione*

Uno schema si dirige sempre verso una situazione caratterizzata da uno scopo atteso, o più d'uno, per esempio un problema da risolvere, nella sua complessità epistemica e cognitiva, nonché di messa in campo di competenza.

I due concetti di *schema* e di *situazione* sono ciascuno strettamente relazionati all'altro. Dunque, anche in una situazione specifica e non solo in generale, le idee di *scopo*, *regola*, *concettualizzazione*, *inferenza* sono essenziali e strettamente connesse. Esse intervengono nella determinazione di un'ingegneria di situazioni didattiche in generale, ancora di più nel caso enormemente diffuso in cui, a fronte di un docente, si trovano più discenti; in questo caso, il processo di interazione tra soggetti può occupare un ruolo decisivo, addirittura più decisivo dei processi di comprensione (D'Amore, 2005). Qui assume un ruolo fondamentale l'idea di *labor* (D'Amore, 2015), lavoro svolto in comune fra docente e allievo, presa in profonda considerazione in questi ultimi anni dalla teoria dell'oggettivazione (Radford, 1997, 2004, 2005, 2006a, 2014, 2015, 2017a; D'Amore, 2018; D'Amore & Radford, 2017; Radford & D'Amore, 2006). Sugeriamo al lettore l'articolo di Luis Radford (2017b) nel quale l'autore racconta in prima persona il percorso personale che l'ha portato all'elaborazione della sua teoria.

Spesso in una situazione si evidenziano due termini relativi ai soggetti in gioco, e con diverse modalità: *esperienza* e *apprendimento*. Sulla base di alcuni presupposti, l'apprendimento fa parte dell'esperienza, ma non viceversa, per cui fra i due c'è una sorta di dipendenza causale. Si possono però trovare esempi nei quali l'esperienza comporta apprendimento, grazie a situazioni nelle quali l'esperienza si sviluppa. Ovviamente, in questo caso dobbiamo generalizzare e non pensare solo all'ambiente scolastico. Dunque l'apprendimento condivide con l'esperienza alcuni punti cruciali:

- la durata temporale, che può essere assai variabile;
- i diversi registri e le diverse modalità messe in campo nelle situazioni: registri tecnici, linguistici, gestuali, sociali, affettivi;
- i ruoli personali in gioco e dunque il senso che i vari soggetti assumono;
- i ruoli degli strumenti in gioco.

Tutti concordiamo sul fatto che l'esperienza ha un'enorme varietà di modalità di espressione, mentre non così sembra essere per l'apprendimento; ma la teoria dei campi concettuali ribalta queste idee, dato che mostra come uno stesso concetto si sviluppa attraverso situazioni varie e diverse, dato che lo stesso concetto è posto in relazione in più modi e su diversi livelli con concetti

ed enunciati ritenuti veri (teoremi-in-atto) per un atto di intuizione, più rappresentazioni linguistiche e simboliche; inoltre si sviluppa unitamente ad altri concetti creando veri e propri sistemi concettuali.

Sul piano teorico, *situazione* e *schema* formano una coppia indissociabile; le situazioni offrono delle occasioni per dare un senso alle attività e ai concetti, ma non sono esse stesse il senso. Il senso è lo schema, asserisce acutamente Piaget in varie occasioni. Ma la realtà è fatta di oggetti e di relazioni: si tratta sempre di dare un senso a tali oggetti e a tali relazioni, attraverso il filtro delle situazioni, la loro interpretazione, la loro realtà.

Spesso, nelle situazioni didattiche, quello cui s'assiste è, al contrario, proprio una perdita di senso dato agli oggetti e alle loro relazioni (Brousseau & D'Amore, 2008).

Su quella geniale teoria che ha dato origine alla DdM e che si chiama *teoria delle situazioni*, le citazioni possibili sono migliaia; ci limitiamo a Brousseau (1997) come selezione di testi base, e a D'Amore (1999) e D'Amore e Sbaragli (2011) come testi didattici, destinati a futuri insegnanti.

4. Teoria dei concetti figurali

Nel lontano 1963, l'indimenticabile pioniere della DdM Efraim Fischbein lanciò la fertile idea dei *concetti figurali* (Fischbein, 1963). Vuoi che la lingua nella quale era scritto il libro (il rumeno) non fosse proprio la più diffusa negli ambienti scientifici, vuoi che ancora fosse troppo presto per questo genere di considerazioni, fatto sta che si dovette aspettare il 1993, anno della traduzione e della pubblicazione in inglese di questa idea, per avere una sua definitiva esplosione in contesto internazionale (Fischbein, 1993). Naturalmente, ciò non significa che vi siano stati 30 anni di assoluto silenzio su questo tema! Anzi. Lo stesso Fischbein e tanti altri ricercatori hanno scritto e lavorato in tal senso; solo che l'articolo definitivo, che ne raccoglie tutte le idee e le esperienze, segue di 30 anni la prima apparizione di un altro scritto con lo stesso titolo. Di che cosa si tratta? Lo diciamo con le parole dello stesso Fischbein:

Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate da definizioni nel contesto di un certo sistema assiomatico. Da questo punto di vista una figura geometrica ha una natura concettuale. Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale). (...) Una figura geometrica può allora essere descritta come avente *intrinsecamente* proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica *non* è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. (...) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (...) Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate *concetti figurali*, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo

stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come idealità, astrattezza, generalità, perfezione. Non intendo affermare che la rappresentazione che abbiamo in mente, quando immaginiamo una figura geometrica, sia priva di ogni qualità sensoriale (come il colore) eccetto le proprietà spaziali; ma affermo che, mentre operiamo con una figura geometrica, noi agiamo come se *nessun'altra qualità contasse*. (Fischbein, 1993, p. 142)

Dunque, nel caso particolare delle figure della geometria, noi siamo disposti a selezionare proprietà, qualità, aspetti diversi, perché tendiamo a un concetto geometrico; e quello figurale sembra allora essere un concetto a sé stante.

Il disegno di una figura geometrica (per esempio di un trapezio) è una rappresentazione grafica di un concetto complesso: non si tratta solo del concetto geometrico astratto di trapezio, ma del concetto figurale di trapezio. Non appena abbiamo a disposizione il disegno di un trapezio, quella figura di trapezio diventa una particolare produzione iconica del concetto figurale di trapezio.

Il disegno a nostra disposizione non condivide se non in parte le proprietà caratteristiche del concetto di *trapezio* (generalità, astrattezza), ma ne condivide in pieno la componente figurale.³ Ma, mentre la parola *trapezio* non ha ... forma trapezoidale, la rappresentazione (il disegno) di un trapezio allude proprio iconicamente a quella forma; dunque le rappresentazioni figurali di particolari concetti geometrici condividono con il concetto geometrico astratto al quale fanno riferimento, del quale vogliono essere immagine, qualche cosa: *la componente figurale*.

Esiste dunque qualche cosa che si può chiamare *concetto figurale* che non coincide con l'oggetto geometrico in sé.

Ma allora scatta un meccanismo che interessa lo studioso di DdM: se si prediligono alcune rappresentazioni, dato che queste si trovano a fare da cuscinetto, da legame, tra la componente diciamo così figurale e il concetto della figura in sé, tali rappresentazioni diventano forti, finiscono con l'essere riconosciute come supporti diretti se non unici per la componente figurale del concetto. Anzi: quelle figure, quelle rappresentazioni, sono *la* componente figurale del concetto.

Ora, bisognerebbe sfruttare questo fatto non per bloccare l'apprendimento (come potrebbe capitare in aula) ma per rafforzarlo. Occorre cioè che vi sia consapevolezza critica e che si sia disposti (allenati) ad atti mentali opportuni per poter far sì che questi supporti visivi siano produttivi.

Scrivono Mariotti (1995), allieva diretta di Fischbein: "Solo (...) con un atto mentale, un disegno può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità" (p. 48). Occorre dunque una dinamica dei concetti figurali, occorre far interagire gli aspetti figurali con quelli

³ Qui ci sarebbe da notare, ancora una volta, che *quella figura di trapezio non è un trapezio* (considerato nella sua generale specificità), per ovvi motivi; le proprietà peculiari specifiche della figura prodotta semplicemente circostanziano l'idea generale di trapezio.

concettuali.

È allora illuminante la ricerca condotta dalla stessa Mariotti (1992) sulla seguente attività: gli allievi devono contare il numero di facce, vertici e spigoli di un cubo, secondo due diverse modalità: dapprima senza alcun ausilio di modelli concreti, poi utilizzando uno di questi. I protocolli prodotti da questa ricerca sono molto chiarificatori e i commenti che fa l'autrice lo sono ancora di più: “Alcuni studenti contano mentalmente, simulando la numerazione poi, dopo qualche momento, perdono il filo di quest'ultima e si arenano (...). Uno studente, invece, conta raggruppando gli elementi secondo un'organizzazione spaziale dell'immagine mentale e ci riesce” (Mariotti, 1992, p. 13).

Dunque, per superare la prova, sembra necessario organizzare l'immagine mentale secondo schemi concettuali che rimandano a diverse abilità.

Ma l'idea di *immagine mentale* sembra per i più essere qualche cosa di sfuggente, di debole, di sfuocato; per poter lavorare con successo al problema proposto dalla Mariotti occorre invece dare a tale immagine mentale una caratteristica di *stabilità*. Di che cosa si tratta? Lo diciamo con la definizione dell'autrice: “una capacità di mantenere in testa l'oggetto del ragionamento geometrico come un invariante, malgrado le trasformazioni realizzate dal soggetto” (Mariotti, 1992, p. 13).

Si può anche parlare di armonia tra l'aspetto figurale e quello concettuale: se c'è dissidio, se tale armonia manca, allora le attività geometriche basate essenzialmente su figure non portano alcuna crescita nell'apprendimento consapevole.

Ma non ci sono solo le figure a fungere da supporti visivi per gli allievi; nella pratica scolastica sono molto diffusi anche modelli concreti di varia natura (di legno, di cartone, di plastica); in tal senso, le figure e i disegni sono solo un sottoinsieme dei modelli concreti disponibili agli allievi. Scrive Maier (1993):

In geometria sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perché le loro concezioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni. A mio avviso, questo è dovuto al fatto che i supporti visivi sono spesso utilizzati nelle ore di geometria in una maniera non soddisfacente. A volte i modelli utilizzati sono inadatti a rappresentare la nozione che si tratta e così gli allievi acquisiscono un'idea sbagliata per quanto riguarda il senso del vocabolario geometrico. (Maier, 1993, p. 75)

Si veda anche Maier (1998).

Tornando alle implicazioni didattiche, scrive ancora Fischbein nello stesso articolo:

Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla

conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. (Fischbein, 1993, p. 156)

La preoccupazione è legittima, visto che i risultati ottenuti senza di essa sono sotto gli occhi di tutti; e la raccomandazione di Fischbein è estremamente chiara.

Nota 4.

Certo, un'eventuale nuova presa in carica di questa teoria, oggi, dovrebbe prima passare attraverso l'analisi della distinzione fra realismo e pragmatismo, dato che essa sembra molto connessa al primo; nell'ipotesi pragmatista, la distinzione diventa assai sfumata a causa del fatto che in essa *oggetto*, *concetto* e *pratica* sono fortemente intrecciati, difficilmente separabili ed è assai difficile evidenziare uno di questi termini isolandolo dagli altri. Si pone poi il problema degli oggetti che non hanno a che fare con la geometria e ci si potrebbe chiedere se sono possibili e convenienti analisi simili, mutando ovviamente quel che c'è da mutare. Anche queste considerazioni, a nostro avviso, mostrano la modernità e l'attualità di queste riflessioni che ancora ci costringono a porre dei distinguo di indubbio interesse.

5. Un incontro pubblico fra Fischbein e Vergnaud

Dal 1986, ininterrottamente, si svolge il convegno nazionale *Incontri con la Matematica* riservato a insegnanti di scuola; il primo (numero 0) si svolse a Bologna sul tema *Gioco e Matematica* (D'Amore, 1986). Dal 1987 l'evento si svolge a Castel San Pietro Terme; nel novembre 2018 si è svolta la XXXII edizione (D'Amore & Sbaragli, 2018).

In occasione della edizione numero 6 (13–15 novembre 1992), si decise di dedicare tutto il convegno all'incontro-confronto fra i due grandi studiosi allora sulla bocca di tutti i ricercatori, ma per lo più sconosciuti agli insegnanti: Efraim Fischbein e Gérard Vergnaud che, a detta di entrambi, mai si erano incontrati personalmente. Ci sembrava una ghiotta occasione per far conoscere al pubblico degli insegnanti italiani le differenze e le sintonie fra quei due giganti della ricerca in DdM. Non c'erano altri relatori, solo i due.

L'evento fu un'occasione ghiotta per rendersi conto delle profonde relazioni fra gli studi dei due ricercatori, delle differenze di impostazioni e degli interessi personali specifici. In più occasioni, ma specialmente l'ultimo giorno, si diede ampio spazio a discussioni personali fra i due, svolte di fronte al vasto pubblico.

Non vogliamo qui entrare in dettagli, ma solo puntare l'attenzione sulle

analogie a proposito di termini come *schemi*, *modelli*, *difficoltà cognitive*, temi che, a nostro avviso, potrebbero essere ripresi dalla ricerca in DdM proprio a partire da quanto emerse in questa occasione storica.

Per avere una relazione completa su questo evento internazionale di portata a nostro avviso immensa, si veda (Fischbein & Vergnaud, 1992). L'analisi di questo testo mostra come vi siano intrecci notevoli di interessi comuni (modelli, difficoltà di apprendimento da parte degli studenti, ragionamento matematico, schemi, concetti) e altri specifici (dimostrazione, probabilità, ... in Fischbein; aritmetica, *problem solving*, ... in Vergnaud).

Noi riteniamo che questo testo, sebbene abbia oggi 26 anni di età, ancora potrebbe essere fonte di riflessione teorica per ricercatori in DdM.

Ringraziamento

Gli autori esprimono un sentito ringraziamento alla PhD Maura Iori per il serio contributo critico generosamente fornito alla realizzazione di questo lavoro.

Riferimenti bibliografici

- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Montreal: Holt, Rinehart et Winston. [Trad. it.: Milano, Angeli, 1978].
- Bara, B. G. (1990). *Scienza cognitiva: Un approccio evolutivo alla simulazione della mente*. Torino: Boringhieri.
- Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind: Collected essays in anthropology, psychiatry, evolution, and epistemology*. Chicago: Chandler Publishing Company. [Trad. it.: Milano, Adelphi, 1976].
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica: Dall'empirico al didattico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la matematica n. 22: Didattica della matematica e azioni d'aula* (pp. 3–14). Bologna: Pitagora.
- Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 3, 261–286.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press. [Trad. it.: Roma, Armando, 1964].
- Bruner, J. S. (1964a). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15. doi:10.1037/h0044160
- Bruner, J. S. (1964b). *Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics*. In E. R. Hilgard (Ed.), *Theories of learning and instruction: The sixty-third yearbook of the National Society for the Study of Education* (pp. 306–335). Chicago, IL: University of Chicago Press.

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University Press. [Trad. it.: Roma, Armando, 1982].
- Chafe, W. L. (1977). Creativity in verbalization and its implications for the nature of stored knowledge. In R. O. Freedle (Ed.), *Discourse production and comprehension* (Vol. I, pp. 41–55). Norwood, NJ: Ablex.
- D'Amore, B. (1993). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. [Trad. spagn.: Madrid, Sintesis, 1993].
- D'Amore, B. (1997). Matite - Orettele - Przetqzyw: Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20A(3), 241–256.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Trad. spagn.: Bogotá, Magistero, 2006; trad. portog.: Sao Paolo: Livraria da Física, 2015].
- D'Amore, B. (2000). Rappresentazioni. Immagini e modelli. Una proposta di terminologia. Modelli mentali negli studenti. *Iter*, 7, 80–85.
- D'Amore, B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 38(1), 17–46.
- D'Amore, B. (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 38(2), 143–168.
- D'Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. In M. Laeng (Ed.), *Enciclopedia Pedagogica. Appendice A-Z* (pp. 1508–1509). Brescia: La Scuola.
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri. [Trad. tedesco: Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, 2010].
- D'Amore, B. (2008). Prefazione a: Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica* (B. D'Amore, Ed.) (pp. VII–XII). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*, 63, 19–26.
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- D'Amore, B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí

- presentados. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 237–254). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 1(1), 4–20. Disponibile da www.rivistaddm.ch
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97–127.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). “Competenze”: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, 17(3), 327–338.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006a). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29A–B(6), 645–664.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006b). Una riflessione sul termine “competenza” in didattica della matematica. *Difficoltà in matematica*, 2(2), 155–164.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). Dalla conoscenza alla competenza nell'educazione matematica. In A. M. Benini & A. Orlandoni (Eds.), *Matematica: Ricerca sul curricolo e innovazione didattica* (pp. 12–20). Napoli: Tecnodid.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). *Le didattiche disciplinari*. Trento: Erickson.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del “contratto”*. (Prefazione e postfazione di Guy Brousseau). Bologna: Archetipolibri. [Ediz. spagn.: Bogotá, Ed. Magisterio, 2018].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 119–162.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49–77.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1994). Everyday language and “external” models in an a-didactic situation. In N. Malara & L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 115–122). Modena: Dipartimento di Matematica, Università di Modena.
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua

- comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A(3), 223–246.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (Eds.). (2018). La didattica della matematica, strumento concreto in aula. *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 32*. Bologna: Pitagora.
- Dupin, J.-J. (1995). Modèles et modélisation dans l'enseignement: Quelques contraintes didactiques. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIIIe école et université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 247–257). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382.
- Duval, R. (1998). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6(1), 139–163.
- Duval, R. (2015). Les theories cognitives en didactique des mathematiques: Lesquelles et pourquoi? In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 97–126). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría: Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. In R. Duval & A. Saenz Ludlow (2016), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. (Prefazione di Bruno D'Amore. Articoli commentati da Bruno D'Amore e Carlos Eduardo Vasco Uribe) (pp. 13–60). Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9
- Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, 26(2), 211–245.
- Fandiño Pinilla, M. I. (Ed.). (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. In A. M. Benini & L. Gianferrari (Eds.), *Valutare per migliorarsi* (pp. 40–48). Napoli: Tecnodid.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica: L'emergenza della didattica nella formazione* (pp. 21–28). Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana.

- Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Trad. spagn.: Bogotá, Ed. Magisterio, 2010].
- Fandiño Pinilla, M. I. (2011). *Curricolo, competenze e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Insegnare e valutare la competenza in matematica. In B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, S. Loiero, I. Mattozzi, M. Pellerrey, T. Pera, G. Staccioli, & P. Traverso (Eds.), *Didattica per competenze*. Supplemento a *La Vita Scolastica*, 70(2), 10–14.
- Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale*. Bucarest: Editura Academiei Republicii Populare Romine.
- Fischbein, E. (1985a). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 8–19). Bologna: Zanichelli-UMI.
- Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 122–132). Bologna: Zanichelli-UMI.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162.
- Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). Matematica a scuola: Teorie ed esperienze. In B. D'Amore (Ed.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 6*. Bologna: Pitagora.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2010). Representations in mathematics education: An onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 2(1), 58–86.
- Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston. [Trad. it.: Roma, Armando, 1987].
- Gagné, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. New York, NY: CBS College Publishing.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Hall, E. T. (1959). *The silent language*. New York, NY: Doubleday.
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1970].
- Holt, R. R. (1964). Imagery: The return of ostracized. *American Psychologist*, 19(4), 254–264. doi:10.1037/h0046316
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3
- Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5
- Johnson-Laird, P. N. (1972). The three-term series problem. *Cognition*, 1(1), 57–82.

doi:10.1016/0010-0277(72)90045-5

- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models*. Cambridge, MA: Harvard University Press. [Trad. it.: Bologna, il Mulino, 1988].
- Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. J. (1991). *Deduction*. Hove, UK, and Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaldrimidou, M. (1987). *Images mentales et représentations en mathématiques chez des mathématiciens et des étudiants en mathématiques* (Thèse de 3e cycle). Université Paris VII.
- Katz, A. N. (1983). What does it mean to be a high imager? In J. C. Yuille (Ed.), *Imagery, memory and cognition* (pp. 39–63). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Katz, A. N. (1987). Individual differences in the control of imagery processing: Knowing how, knowing when and knowing self. In M. A. McDaniel & M. Pressley (Eds.), *Imagery and related mnemonic processes* (pp. 177–203). New York, NY: Springer.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 7(1), 69–80.
- Maier, H. (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria. *La matematica e la sua didattica*, 12(3), 271–290.
- Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect. *Topologie structurale/Structural topology*, 18, 9–18.
- Mariotti, M. A. (1995). Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria. In B. D'Amore (Ed.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 9: Insegnare ad apprendere la Matematica in aula: Situazioni e prospettive* (pp. 47–58). Bologna, Pitagora.
- Minsky, M. (1975). *A framework for representing knowledge*. In P. Winston (Ed.), *The psychology of computer vision* (pp. 211–277). New York, NY: McGraw-Hill.
- Noirfalise, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (Eds.). (1996). *Actes de la VIIIe école et université d'été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.
- Paivio, A. (1986). *Mental Representations: A dual coding approach*. Oxford: Oxford University Press.
- Pellerey, M. (1984). Procedimenti matematici e immagini mentali. *Orientamenti pedagogici*, 31(3), 444–465.
- Piaget, J. (1967). *Lo sviluppo mentale del bambino e altri studi di psicologia*. Torino: Einaudi.
- Piaget, J. (1970). *Psicopedagogia e mentalità infantile*. Firenze: Le Monnier.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. Paris: Presses universitaires de France. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1970].
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: Presses universitaires de France.
- Pontecorvo, C. (1983). Concettualizzazione e insegnamento. In C. Pontecorvo (Ed.), *Concetti e conoscenze* (pp. 262–354). Torino: Loescher.
- Pontecorvo, C., & Pontecorvo, M. (1985). *Psicologia dell'educazione: Conoscere a*

scuola. Bologna: il Mulino.

- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2006b). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 39–65.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2015). The epistemological foundations of the theory of objectification. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 127–149). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*.
Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 113–134). Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2017b). La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: Alcuni elementi del mio percorso. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 65–74.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). Semiotics, culture and mathematical thinking [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Romberg, T. A. (1983). Toward "normal science" in some mathematics education research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 15(2), 89–92.
- Romberg, T. A. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermander (Eds.), *Proceedings of the 2nd TME-Conference: Foundations and methodology of the discipline mathematics education (Didactics of mathematics)* (pp. 97–112). Bielefeld-Antwerpen, Germania: University of Bielefeld – IDM Publications.
- Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In R. J. Spiro et al. (Eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension* (pp. 33–58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rumelhart D. E., & McClelland, J. L. (Eds.). (1986). *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition*. Cambridge, MA: MIT Press. [Trad. it. (parziale): Rumelhart, D. E., & McClelland, J. L. (1991). *PDP: Microstruttura dei processi cognitivi: Sistemi intelligenti*. Bologna: il Mulino].
- Rumelhart, D. E., & Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory.

- In R. C. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague (Eds.), *Schooling and the acquisition of knowledge* (pp. 99–135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Russell, S. J., & Norvig, P. (2003). *Artificial intelligence: A modern approach*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Saada-Robert, M. (1989). La microgénése de la représentation d'un problème. *Psychologie Française*, 34(2–3), 193–206.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2/3), 285–311.
- Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding: An inquiry into human knowledge structures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shepard, R. N. (1980). *Internal representations: Studies in perception imagery and cognition*. Montgomery, VT: Bradford.
- Tall, D. (1999). *Efraim Fischbein, 1920–1998, Founder President of PME: A tribute*. Disponibile da <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999b-fischbein-tribute.pdf>
- Vecchio, L. (1992). Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale. In L. Vecchio (Ed.), *Atti del Convegno di Pavia, 5–6 ottobre 1990: Le immagini mentali* (pp. 15–48). Firenze: La Nuova Italia.
- Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française*, 30(3–4), 245–253. [Trad. it. in Fischbein & Vergnaud, 1992, vedi sopra, 125–143].
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 10(1), 133–169.
- Vergnaud, G. (1995). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 20–45). Bologna: Zanichelli-UMI.
- Vergnaud, G. (2017). Due riflessioni sull'attività in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 7–12.
- Vygotskij, L. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato in russo nel 1934).
- Whorf, B. L. (1940). Science and linguistics. *MIT Technology Review*, 42(6), 229–231 e 247–248.
- Whorf, B. L. (1956). *Language, thought, and reality: Selected writings of Benjamin Lee Whorf* (J. B. Carroll, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.
- Winograd, T. (1975). Frame representations and the declarative/procedural controversy. In D. G. Bobrow & A. M. Collins (Eds.), *Representation and Understanding: Studies in Cognitive Science* (pp. 185–210). New York, NY: Academic Press.